CONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE

DEF 1

SIA $y = f(x)$ UNA FUNZIONE DEFINITA IN X

SIA $x_0 \in DX$ (UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE)

DIREMO CHE:

$f(x)$ È CONTINUA IN x_0 SE:

$$\exists \text{ FINITO } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

IN BREVE POSSIAMO COSÌ RIASSUMERE LE 3 CONDIZIONI PER LA CONTINUITÀ

1) $\exists f(x_0)$

2) $\exists$ FINITO $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

3) $l = f(x_0)$

POSSIAMO ANCHE DIRE CHE:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

DEF 2

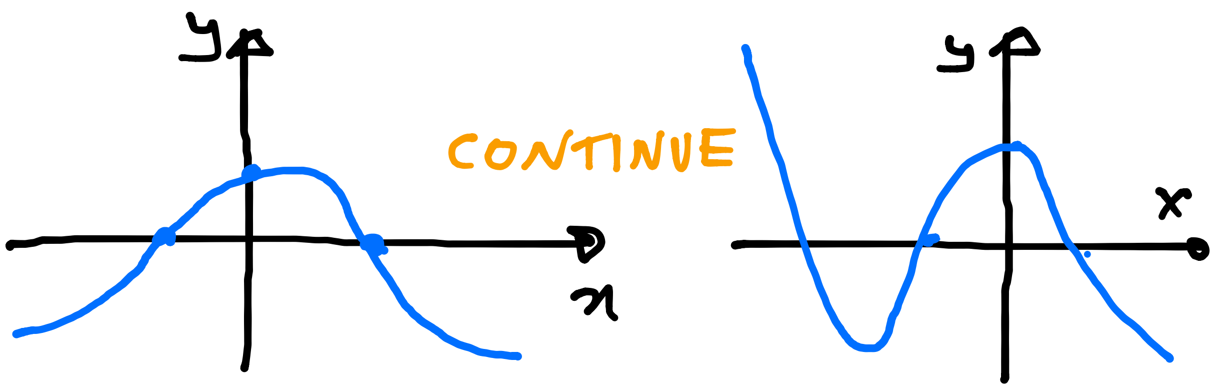
SIA $y=f(x)$ UNA FUNZIONE DEFINITA IN X
SI DICE CHE $f(x)$ È CONTINUA IN X
SE È CONTINUA IN TUTTI I PUNTI DI X

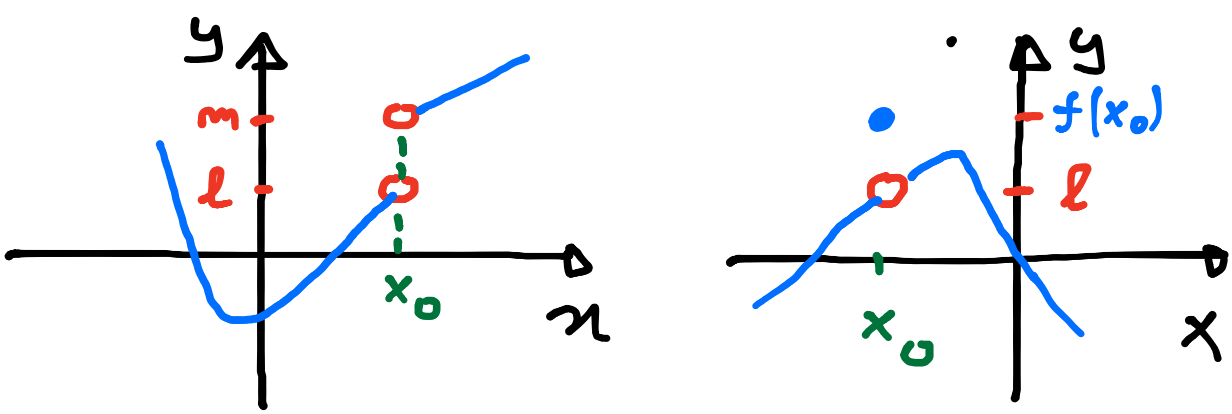
$$\forall x_0 \in X$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO

SE UNA FUNZIONE È CONTINUA IN X
SARÀ POSSIBILE DISEGNARNE IL GRAFICO
SENZA STACCARE LA PENNA DAL FOGLIO.

ESEMPI





CLASSIFICAZIONE DISCONTINUITÀ

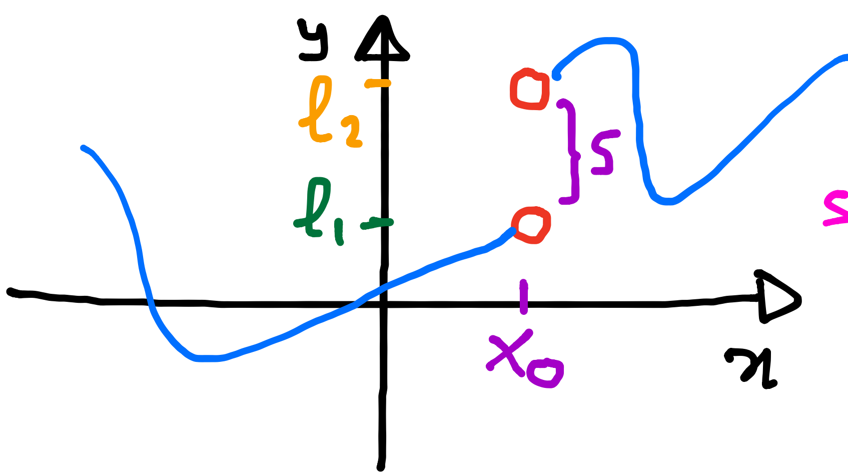
1ª SPECIE

DIREMO CHE x_0 È UN PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI 1ª SPECIE SE:

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$$
$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$$

MA $\ell_1 \neq \ell_2$

OVVERO: LIMITE DESTRO $\neq$ LIMITE SINISTRO

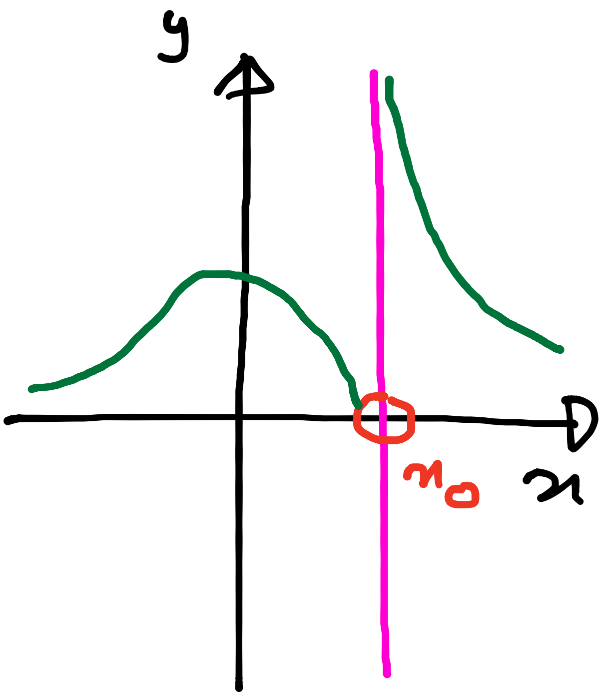


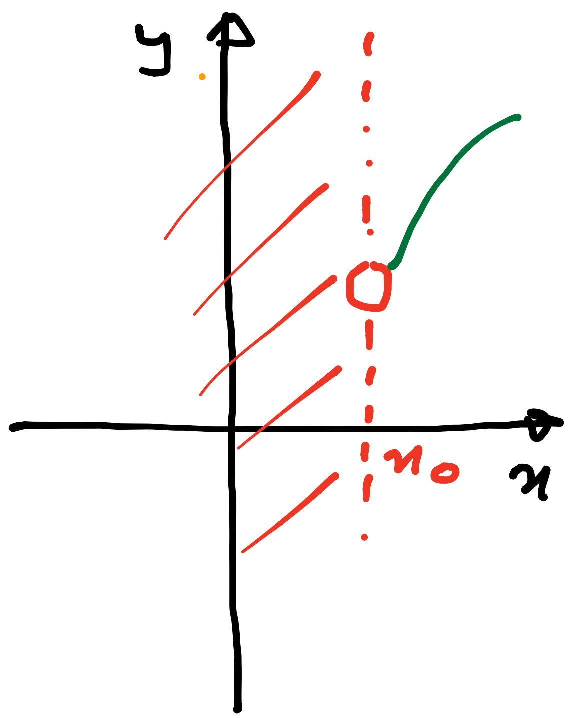
$s = |\ell_2 - \ell_1|$ SALTO DI DISCONTINUITÀ

QUESTO TIPO DI DISCONTINUITÀ SI TROVA IN PARTICOLARE NELLE FUNZIONI CON VALORI ASSOLUTI E IN QUELLE MULTIDEFINITE (VEDI ESEMPI)

2^a SPECIE

DIREMO CHE x_0 È UN PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI SECONDA SPECIE SE ALMENO UNO DEI 2 LIMITI (DX o SX) È INFINITO o NON ESISTE





$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\nexists \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

3^a SPECIE O ELIMINABILE

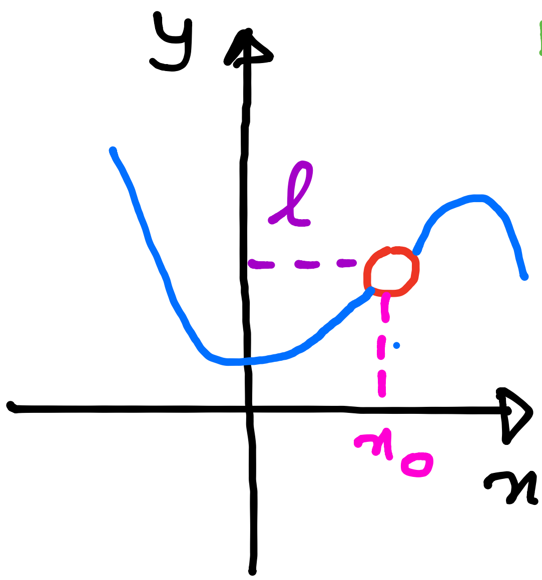
DIREMO CHE x_0 È UN PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI **TERZA SPECIE O ELIMINABILE** SE:

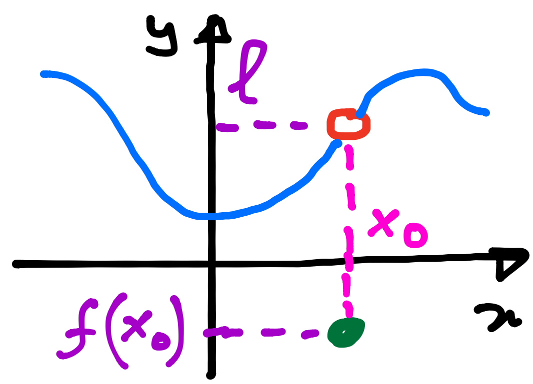
$\exists$ FINITO $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ MA...

$\nexists f(x_0)$ OPPURE $\ell \neq f(x_0)$

$x_0 \notin X$ DOMINIO $\qquad x_0 \in X$

IL LIMITE È DIVERSO DAL VALORE CHE LA FUNZIONE ASSUME IN QUEL PUNTO





TEOREMI CONTINUITÀ

TEOREMA DI WEIERSTRASS

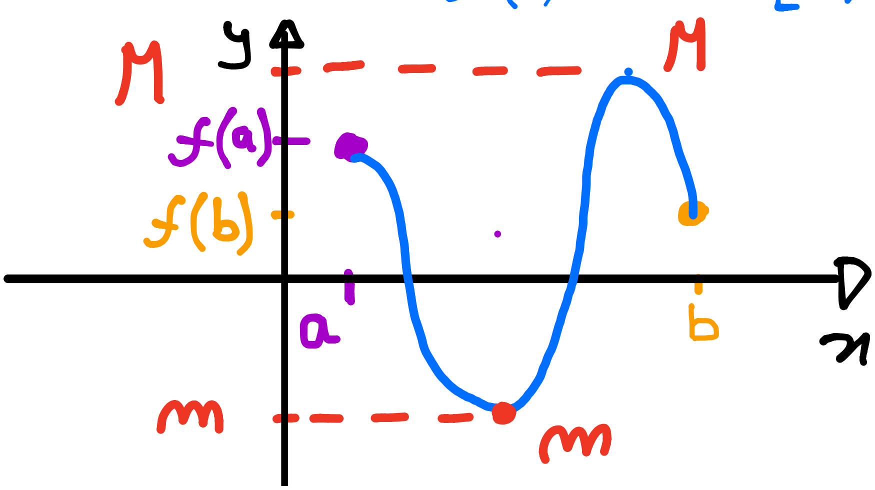
SE $f(x)$ È UNA FUNZIONE CONTINUA NELL' INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO $[a;b]$, ALLORA $f(x)$ È DOTATA DI MASSIMO E MINIMO ASSOLUTI:

$\exists M \in \mathbb{R} : \max f(x) = M$

CIOÈ $M \geq f(x) \quad \forall x \in [a;b]$

$\exists m \in \mathbb{R} : \min f(x) = m$

CIOÈ: $m \leq f(x) \quad \forall x \in [a;b]$

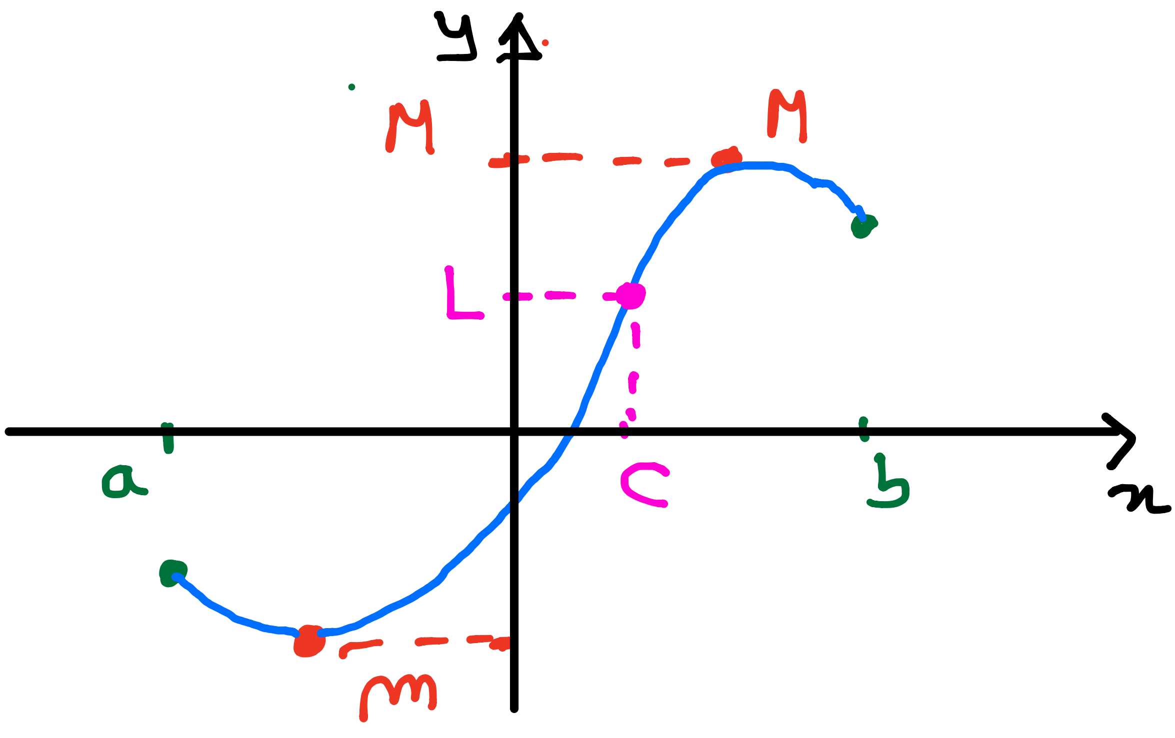


TEOREMA DI DARBOUX o DI ESISTENZA DEI VALORI INTERMEDI

hp: SE $f(x)$ È CONTINUA IN $[a;b]$

ts $\begin{cases} \text{ALLORA ASSUME TUTTI I VALORI} \\ \text{COMPRESI TRA IL MINIMO E IL} \\ \text{MASSIMO ASSOLUTI:} \end{cases}$

$$\forall L \in [m;M] \quad \exists c \in [a;b] : f(c) = L$$



IN PARTICOLARE SE $L=0$ SI PUÒ DEDURRE IL SEGUENTE:

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

hp

$f(x)$ CONTINUA IN $[a;b]$

$f(a)\cdot f(b)<0$

(OVVERO ASSUME AGLI ESTREMI a E b VALORI DI SEGNO OPPOSTO)

ts $\exists c \in]a;b[: f(c)=0$

(OVVERO: DOVRÀ ASSUMERE IL VALORE ZERO IN ALMENO UN PUNTO)