

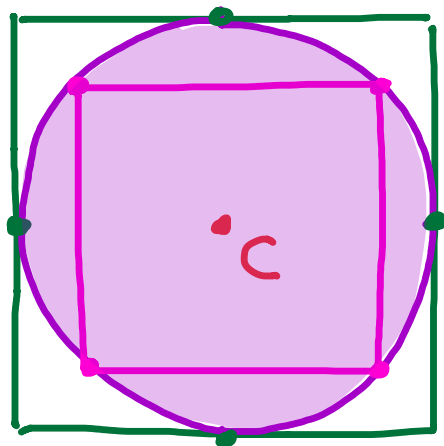
INTEGRALI DEFINITI

GLI INTEGRALI DEFINITI SONO STRETTAMENTE LEGATI AL CALCOLO DI UN'AREA DI UNA SUPERFICIE

PER CAPIRE MEGLIO IL CONCETTO POSSIAMO RICHIAMARE IL METODO UTILIZZATO DA ARCHIMEDE PER CALCOLARE L'AREA DEL CERCHIO

1° STEP

CONSIDERIAMO UN QUADRATO INSCRITTO ED UN QUADRATO CIRCOSCRITTO AL CERCHIO:



LE 2 AREE CI OFFRONO UN' APPROSSIMAZIONE PER DIFETTO E PER ECCESSO DELL'AREA DEL CERCHIO.

SE RADDOPPIAMO IL NUMERO DEI LATI, CONSIDERANDO QUINDI UN OTTAGONO

INSCRITTO ED UN OTTAGONO CIRCOSCRITTO,
OTTERREMO UNA MIGLIORE APPROSSIMAZIONE
PER DIFETTO E PER ECCESSO DELL'AREA
DEL CERCHIO.

FACENDO TENDERE ALL'INFINITO IL
NUMERO DEI LATI, OTTERREMO PROPRIO
L'AREA DEL CERCHIO.

ESISTONO VARI MODI PER DEFINIRE
L'INTEGRALE DEFINITO, UNO DI QUESTI
RICORDA PROPRIO IL METODO DI ARCHIMEDE.

DEFINIZIONE

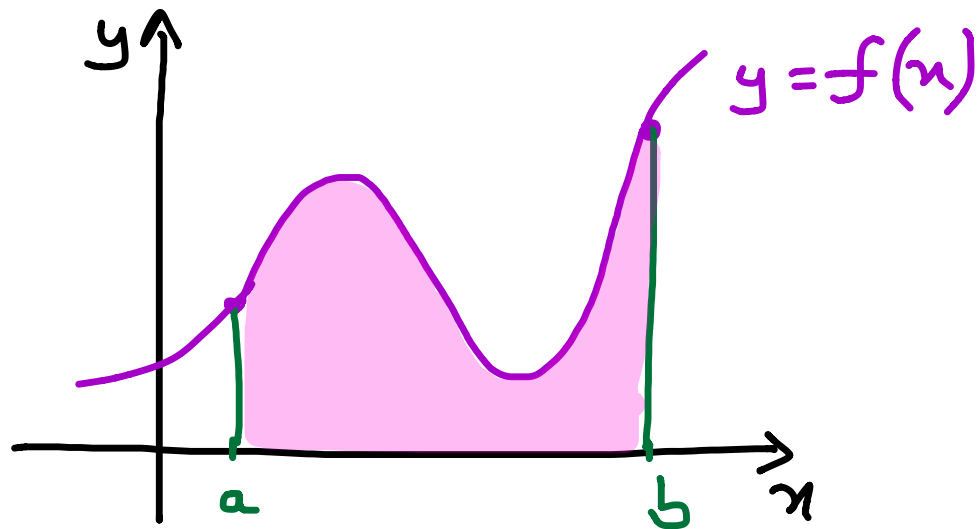
SIA $y=f(x)$ UNA FUNZIONE CONTINUA
IN $[a;b]$

PER SEMPLICITA' SUPPONIAMO CHE:

$$f(x) \geq 0 \text{ in } [a;b]$$

CONSIDERIAMO LA SUPERFICIE DELIMITATA
DAL GRAFICO DI $f(x)$, DALL'ASSE x E
DALLE RETTE $x=a$ E $x=b$; TALE
SUPERFICIE LA DIREMO SOTTESA AL GRAFICO
DI $f(x)$ NELL'INTERVALLO $[a;b]$ E LA

CHIAMEREMO: TRAPEZOIDE



SUDDIVIDIAMO ADESSO L'INTERVALLO
[a;b] IN m INTERVALLI DI AMPIEZZA
UGUALE :

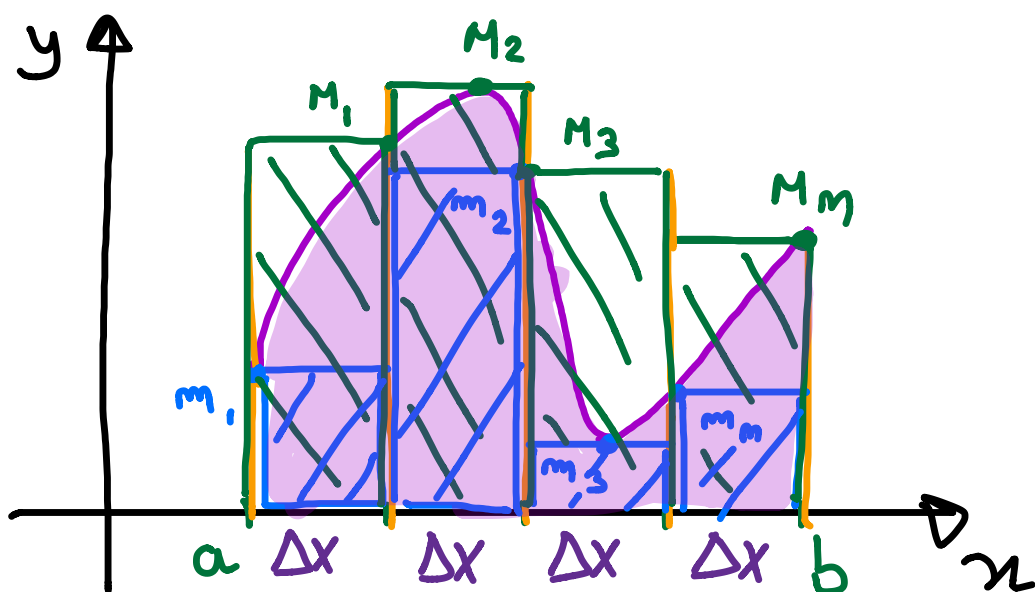
$$\Delta x = \frac{b-a}{m}$$

ESSENDO
 $b-a$ L'AMPIEZZA
DI [a;b]

EBBENE, ESSENDO LA FUNZIONE CONTINUA
IN [a;b] E QUINDI ANCHE IN CIASCUNO
DEGLI INTERVALLINI INDIVIDUATI, PER IL
TEOREMA DI WEIERSTRASS LA FUNZIONE
SARÀ DOTATA DI MINIMO E MASSIMO
ASSOLUTI IN CIASCUN INTERVALLINO:

$$m_1, m_2, \dots, m_m$$

$$M_1, M_2, \dots, M_m$$



SOMMANDO LE AREE DEI RETTANGOLINI INSCRITTI OTTENIAMO:

$$J_m = m_1 \Delta x + m_2 \Delta x + \dots + m_n \Delta x$$

CHE CHIAMEREMO: SOMMA INTEGRALE INFERIORE
E APPROSSIMA PER DIFETTO L'AREA DEL TRAPEZOIDE

SOMMANDO LE AREE DEI RETTANGOLINI CIRCOSCRITTI OTTENIAMO:

$$S_m = M_1 \cdot \Delta x + M_2 \cdot \Delta x + \dots + M_n \cdot \Delta x$$

CHE CHIAMEREMO: SOMMA INTEGRALE SUPERIORE
E APPROSSIMA PER ECCESSO L'AREA DEL TRAPEZOIDE.

EBBENE, PER $n \rightarrow +\infty$ LE 2 SOMME
TENDONO ALLA MISURA DELL'AREA DEL
TRAPEZOIDE.

CHIAMEREMO INTEGRALE DEFINITO DELLA
FUNZIONE $f(x)$ NELL'INTERVALLO $[a; b]$
CHE INDICHEREMO CON

$$\int_a^b f(x) dx$$

IL VALORE DEL LIMITE DELLE 2 SOMME:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

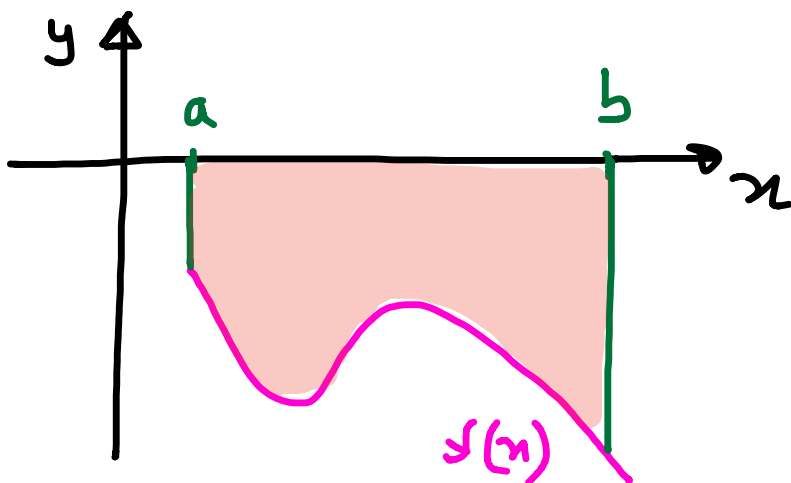
IN BREVE POSSIAMO DIRE CHE:

$$\int_a^b f(x) dx = \text{AREA DEL TRAPEZOIDE}$$

RICORDIANO CHE ABBIAMO POSTO $f(x) \geq 0$
in $[a; b]$

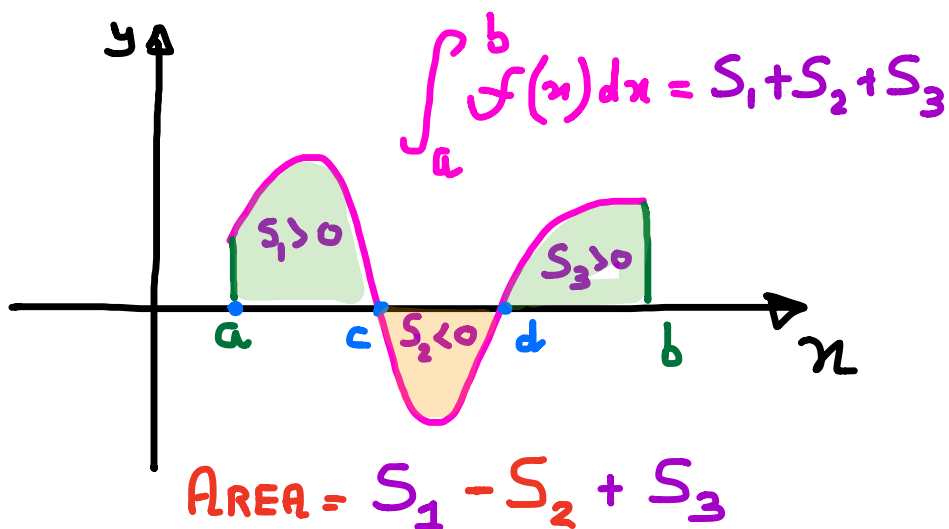
GENERALIZZAZIONE

2. SE $f(x) \leq 0$ IN $[a; b]$



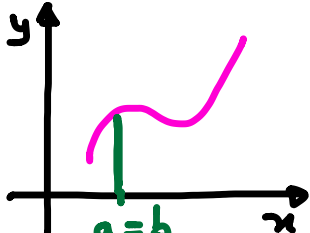
$$\int_a^b f(x) dx = -\text{AREA TRAPEZOIDE} < 0$$

3. SE $f(x)$ ASSUME VALORI SIA POSITIVI SIA NEGATIVI IN $[a; b]$



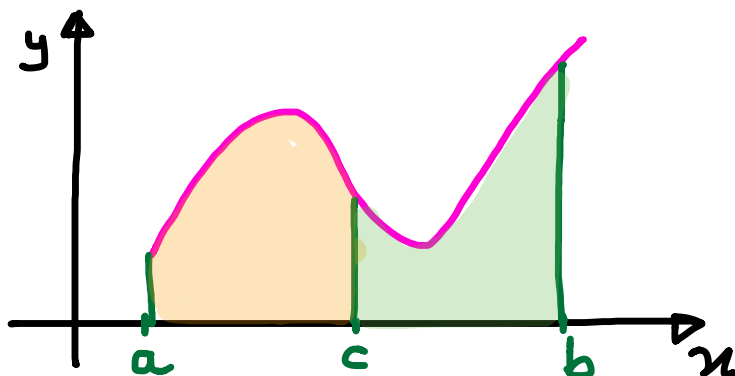
PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI DEFINITI

1) $\int_a^a f(x) dx = 0$ SE GLI
ESTREMI
COINCIDONO



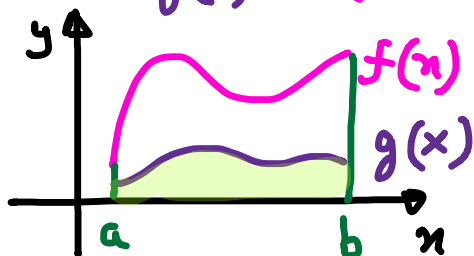
2) $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$ SE SI INVERTONO
GLI ESTREMI

3) PROPRIETÀ ADDITIVA



$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

4) SE $g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [a; b] \Rightarrow$ MONOTONIA



$$\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$$

5) COMBINAZIONE LINEARE

$$\int_a^b K_1 f(x) + K_2 g(x) dx = K_1 \int_a^b f(x) dx + K_2 \int_a^b g(x) dx$$

6) VALORE ASSOLUTO

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

IL VALORE ASSOLUTO DELL'INTEGRALE È
MINORE UGUALE DELL'INTEGRALE DEL VALORE ASSOLUTO

TEOREMA DELLA MEDIA

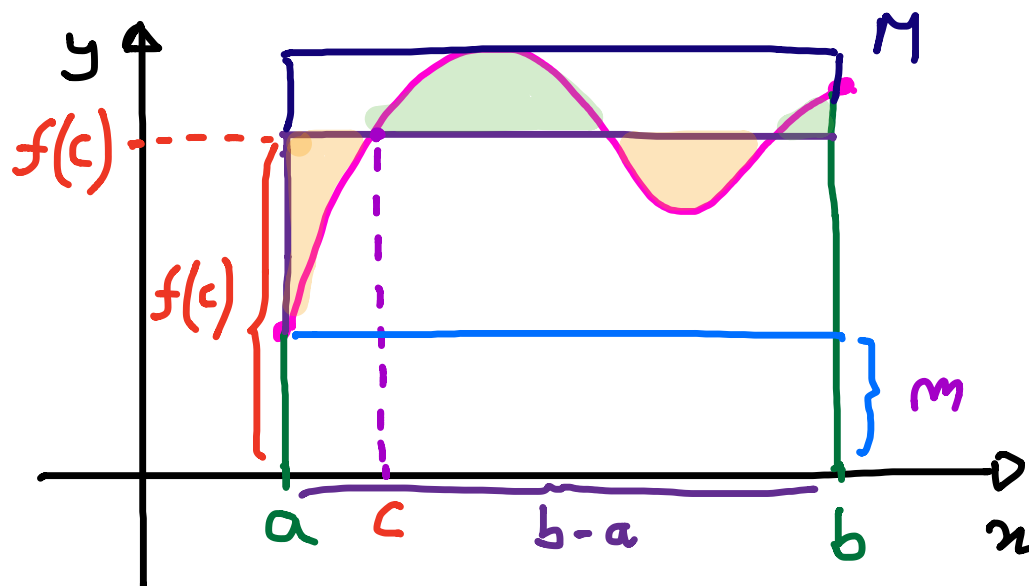
hp: SIA $y=f(x)$ UNA FUNZIONE CONTINUA
NELL'INTERVALLO $[a;b]$

ts: $\exists c \in [a;b]$ TALE CHE:

$$\int_a^b f(x) dx = \underbrace{(b-a)}_{\text{base}} \cdot \overbrace{f(c)}^{\text{ALTEZZA}}$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO

$\exists c \in]a;b[$ TALE CHE L'AREA DEL TRAPEZOIDE
(CHE È L'INTEGRALE DEFINITO) È UGUALE ALL'AREA
DI UN RETTANGOLO DI BASE $b-a$ E ALTEZZA $f(c)$



DIMOSTRAZIONE

ESSENDO $f(x)$ CONTINUA NELL'INTERVALLO $[a; b]$, PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS LA FUNZIONE È DOTATA DI VALORE MASSIMO M E MINIMO m :

$$m < f(x) \leq M \quad \forall x \in [a; b]$$

POSSIAMO AFFERMARE CHE: L'AREA DEL TRAPEZOIDE È COMPRESA TRA L'AREA DEL RETTANGOLO DI BASE $b-a$ E ALTEZZA m (MINIMO) E L'AREA DEL RETTANGOLO DI BASE $b-a$ E ALTEZZA M (MASSIMO) :

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b-a)$$

DIVIDENDO PER $b-a$:

$$m \leq \underbrace{\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}}_{\lambda} \leq M$$

ABBIAMO COSÌ TROVATO UN VALORE COMPRESO TRA IL MINIMO m E IL MASSIMO M ; PER IL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI (DARBOUX)

$$\exists c \in [a; b] : f(c) = \lambda = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

MOLTIPLICANDO PER $b-a$ SI OTTIENE:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a) \quad \text{TESI}$$

OSSERVAZIONE

CHIAMEREMO IL VALORE:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = V_m$$

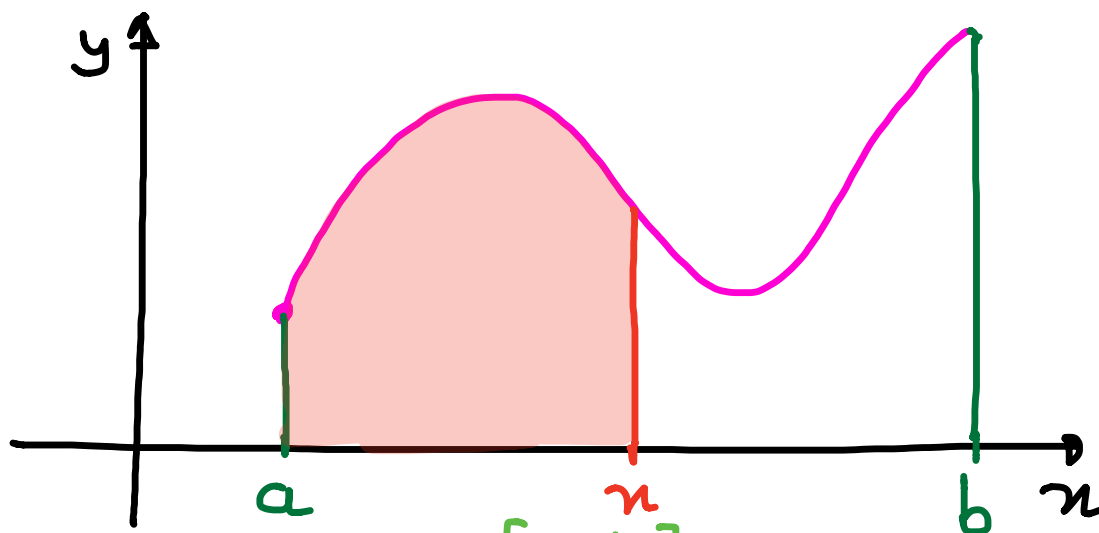
VALORE MEDIO DELLA FUNZIONE $f(x)$ NELL'INTERVALLO $[a; b]$

LA FUNZIONE INTEGRALE

SIA $y=f(x)$ CONTINUA IN $[a;b]$, CHIAMIAMO
FUNZIONE INTEGRALE DI $f(x)$ LA FUNZIONE
DEFINITA DALLA LEGGE:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \forall x \in [a;b]$$

GEOMETRICAMENTE RAPPRESENTA L'AREA DI UN
TRAPEZOIDE



AL VARIARE DI $x \in [a;b]$ SI OTTIENE
UN TRAPEZOIDE E QUINDI UN'AREA DIVERSA;
IN PARTICOLARE:

$$F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$$

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt \quad \text{AREA TRAPEZOIDE}$$

PERCHÉ È IMPORTANTE?

PERCHÉ CREA UN COLLEGAMENTO TRA
INTEGRALE DEFINITO E INDEFINITO, TRAMITE IL

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE
(LA FUNZIONE INTEGRALE È UNA PRIMITIVA DI $f(x)$)
(TORRICELLI - BARROW)

hp : SIA $y = f(x)$ CONTINUA IN $[a; b]$

ts : $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ È UNA PRIMITIVA DI $f(x)$

DIMOSTRAZIONE

OCCORRE DIMOSTRARE CHE $DF(x) = f(x)$

DOBBIAMO CONSIDERARE IL LIMITE DEL RAPPORTO
INCREMENTALE :

SIA $x_0 \in [a; b]$

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t) dt$$

$$F(x_0+h) = \int_a^{x_0+h} f(t) dt = \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$$

IL RAPPORTO INCREMENTALE E':

$$\begin{aligned}\frac{\Delta F(x_0)}{h} &= \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \\&= \frac{\int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt}{h} = \\&= \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt}{h} \stackrel{\uparrow}{=} \frac{h \cdot f(c_h)}{h} = f(c_h)\end{aligned}$$

PER IL TEOREMA DELLA MEDIA

$$\begin{aligned}\exists c_h \in [x_0; x_0+h]: \quad &\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt = (x_0+h - x_0) \cdot f(c_h) \\&= h \cdot f(c_h)\end{aligned}$$

QUINDI:

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c_h) \stackrel{\uparrow}{=} f(x_0)$$

$c_h \in [x_0; x_0+h]$, QUINDI PER $h \rightarrow 0$ SI HA: $c_h \rightarrow x_0$
 $\Rightarrow$ TESI

FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) \quad \text{ESSENDO } G(x) \text{ UNA PRIMITIVA DI } f(x).$$

.. infatti:

DAL TEOREMA PRECEDENTE SAPPIAMO CHE LA FUNZIONE INTEGRALE È UNA PRIMITIVA DI $f(x)$.

ESSENDO $F(x)$ E $G(x)$ ENTRAMBE PRIMITIVE DI $f(x)$, ESSE DIFFERISCONO DI UNA COSTANTE

$$\Rightarrow G(x) = F(x) + c = \int_a^x f(t) dt + c$$

QUINDI:

$$G(b) - G(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) =$$

$$= \int_a^b f(t) dt + \cancel{c} - \underbrace{\int_a^a f(t) dt}_{0} - \cancel{c} =$$

$$= \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \text{TESI!}$$

NON DIPENDE DAL NOME DELLA VARIABILE