Color est e pluribus unus

corso di Matematica

prof. Claudio Desiderio

Modulo 2: Il gioco dei Limiti

Funzioni reali di variabile reale

Parte A: limiti

Unita' 1 A: zero su zero

- **Limiti semplici**
- **n su zero**
- **Forma indeterminata zero su zero**
- **Scomposizioni notevoli**

"Non accontentarti di restare nel GRIGIO per paura
del NERO, ma punta dritto al BIANCO..
e tuffati dentro!
Entra nel vortice.. quindi, rallenta:
ritroverai tutti i COLORI
e farai splendere sempre la tua Vita!!"

Il gioco dei limiti per x tendente a c

Casi semplicissimi: "se non accade nulla di strano!"

La prima mossa per risolvere un limite è sostituire alla x il valore a cui tende....

EX. $\lim_{x \to 2} \frac{3x-4}{x+2} = \frac{3(2)-4}{(2)+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

SE NON ACCADE NULLA DI "STRANO" ABBIAMO GIÀ TROVATO IL RISULTATO!

UN ALTRO ESEMPIO

EX. 2

$$\lim_{x \to 3} \log_{1/2} \frac{x+1}{x-1} = \log_{1/2} \frac{3+1}{3-1} =$$

$$= \log_{1/2} \frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}} = \log_{1/2} 2 = -1$$

QUANDO TROVIAMO QUALCOSA DI "STRANO"?

EX. 3 $\lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x-2} = \frac{2+2}{2-2} = \left[\frac{4}{0}\right]?$

EBBENE, SI PUÒ VERIFICARE FACILMENTE CHE:

$$\frac{m}{0} \rightarrow \infty$$

BASTI PENSARE CHE:

$$\frac{1}{0{,}1} = 10 \; ; \quad \frac{1}{0{,}001} = 1000 \; ; \quad [\cdots]$$

MAN MANO CHE IL DENOMINATORE SI AVVICINA A ZERO LA FRAZIONE ASSUME VALORI VIA VIA PIÙ GRANDI.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x-2} = \left[\frac{4}{0}\right] = \infty$$

N.B. È IMPORTANTE METTERE LE PARENTESI QUADRE [ ] PERCHÉ $\frac{m}{0}$ NON È UN NUMERO.

EX. $$\lim_{x \to 3} \frac{x^2+x}{x^2-3x} = \left[\frac{9+3}{9-9}\right] = \left[\frac{12}{0}\right] = \infty$$

ATTENZIONE AL SEGNO!!

EX.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x-4}{x-1} = \left[\frac{1-4}{1-1}\right] = \left[\frac{-3}{0}\right] = ?\ \infty$$

INIZIALMENTE SOSTITUISCO SEMPLICEMENTE 1.

AL NUMERATORE HO UN NUMERO NEGATIVO; DEVO STABILIRE IL SEGNO DELLO ZERO.

VISTO CHE: $x \to 1^+$ AL DENOMINATORE SOSTITUIRÒ 1,1 (POCO PIÙ DI 1)

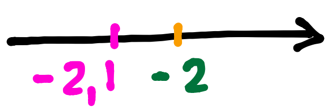
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x-4}{x-1} = \left[\frac{1-4}{1{,}1-1}\right] = \left[\frac{-3}{0^+}\right] = -\infty$$

REGOLA DEI SEGNI

ATTENZIONE AI NUMERI NEGATIVI!!!

EX.

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x-5}{x+2} = \left[\frac{-2-5}{-2+2}\right] = \left[\frac{-7}{0}\right] = ?\ \infty$$



$$= \left[\frac{-7}{-2{,}1+2}\right] = \left[\frac{-7}{0^-}\right] = +\infty$$

E SE TROVIAMO $\left[\frac{0}{0}\right]$?

SI CHIAMA FORMA INDETERMINATA NEL CASO DI LIMITI DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE SI RISOLVE SCOMPONENDO NUMERATORE E DENOMINATORE.

EX.1)
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-x} = \left[\frac{1-2+1}{1-1}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^{\cancel{2}}}{x\cancel{(x-1)}} \underset{(*)}{=} \frac{1-1}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

N.B. IL LIMITE (lim) SI SCRIVE FINO A QUANDO ALLA x NON SI SOSTITUISCE 1

(*) DOPO AVER SEMPLIFICATO RIPROVO A SOSTITUIRE ALLA x IL NUMERO 1

N.B. $\frac{m}{0} = \infty$ $\qquad \frac{0}{m} = 0$

EX 2) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2+5x+6}{x^3+8} = \left[\dfrac{4-10+6}{-8+8}\right] = \left[\dfrac{0}{0}\right]$

RICHIAMO PRODOTTI NOTEVOLI

$x^2+sx+p = (x+a)(x+b)$

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x+3)}{\cancel{(x+2)}(x^2\,2x+4)} = \frac{-2+3}{4+4+4} = \frac{1}{12}$$

EX 3.

$$\lim_{x \to 1} \frac{4x^3-4x^2-x+1}{2x^3+x^2-2x-1} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

SI PUÒ SCOMPORRE CON RUFFINI SAPENDO GIÀ CHE UNO ZERO DEL POLINOMIO È 1

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 4 & -4 & -1 & 1 \\
1 & & 4 & 0 & -1 \\
\hline
 & 4 & 0 & -1 & 0
\end{array}$$

IL POLINOMIO SI SCOMPONE IN

$(x-1)(4x^2-1)$

ADESSO SCOMPONIAMO IL DENOMINATORE

$$2x^3 + x^2 - 2x - 1 = *$$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 2 & 1 & -2 & -1 \\
 & & + & + & + \\
1 & & 2 & 3 & 1 \\
\hline
 & 2 & 3 & 1 & 0
\end{array}$$

$$* = (x-1)(2x^2+3x+1)$$

POSSIAMO RITORNARE AL LIMITE:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(4x^2-1)}{\cancel{(x-1)}(2x^2+3x+1)} = \frac{4-1}{2+3+1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Nella risoluzione di una forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$
si potrebbe utilizzare anche la divisione tra polinomi

$$\lim_{x\to 1} \frac{4x^3-4x^2-x+1}{2x^3+x^2-2x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = *$$

DIVIDIAMO NUMERATORE E DENOMINATORE PER $x-1$

$$\begin{array}{rrrr|l}
4x^3 & -4x^2 & -x & +1 & x-1 \\ \cline{5-5}
4x^3 & -4x^2 & & & 4x^2-1 \\ \cline{1-2}
= & = & & & \\
 & & -x & +1 & \\
 & & -x & +1 & \\ \cline{3-4}
 & & = & = &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +x^2 & -2x & -1 & x-1 \\ \cline{5-5}
2x^3 & -2x^2 & & & 2x^2+3x+1 \\ \cline{1-2}
= & 3x^2 & -2x & & \\
 & 3x^2 & -3x & & \\ \cline{2-3}
 & = & +x & -1 & \\
 & & x & -1 & \\ \cline{3-4}
 & & = & = &
\end{array}$$

$$* = \lim_{x\to 1} \frac{4x^2-1}{2x^2+3x+1} = \frac{4-1}{2+3+1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

E ADESSO PROVACI TU...

1) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3+8}{x^2-4x+4} = +\infty$

NONOSTANTE NON SIA SPECIFICATO 2^+ o 2^-

2) $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{x^2-7x+12}{x^2+7x+12} = +\infty$

3) $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{x^3-125}{x^2-10x+25} = +\infty$

4) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4x^3-9x^2-10x+3}{4x^3-15x^2+8x+3} = \dfrac{22}{13}$

5) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^4-2x^3+x^2-x-2}{2x^3-x^2-20x+28} = -\infty$

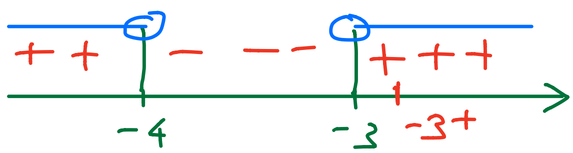
$$\lim_{x\to -3^+} \frac{x^2-7x+12}{x^2+7x+12} = \left[\frac{9+21+12}{9-21+12}\right] = \left[\frac{+m}{0}\right] = +\infty$$

$-3^+ = -2{,}9$

$8{,}9 - 20{,}9 + 12 = 0$ $\qquad 0^+$

$8{,}41 - 20{,}3 + 12 = 0^+$

$x^2 + 7x + 12 > 0$ $\quad \left\langle \begin{matrix} -3 \\ -4 \end{matrix}\right.$ $\quad x < -4 \lor x > -3$



3) $$\lim_{x\to 5^+} \frac{x^3-125}{x^2-10x+25} = \left[\frac{0}{0^+}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 5^+} \frac{\cancel{(x-5)}(x^2+5x+25)}{(x-5)^{\cancel{2}}} = \frac{25+25+25}{0^+}$$

$$= \left[\frac{+m}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^4-2x^3+x^2-x-2}{2x^3-x^2-20x+28} = \left[\frac{16-16+4-4}{16-4-40+28}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$= *$

	1	-2	1	-1	-2
2		2	0	2	2
	1	0	1	1	0

$(x-2)(x^3+x+1)$

	2	-1	-20	+28
2		4	6	-28
	2	3	-14	0

$(x-2)(2x^2+3x-14)$

$$* = \lim_{x\to 2^-} \frac{\cancel{(x-2)}(x^3+x+1)}{\cancel{(x-2)}(2x^2+3x-14)} = \left[\frac{8+2+1}{8+6-14}\right]$$

$$\left[\frac{+m}{0^-}\right] = -\infty$$

$2x^2+3x-14 > 0$ $\begin{cases} 2 \\ -7/2 \end{cases}$

$2(1{,}9)^2+3(1{,}9)-14 = -1{,}08$

$\Delta = 9+112 = 121$

$\frac{-3\pm 11}{4}$

IL CASO DELLE FUNZIONI IRRAZIONALI

EX. $$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x-3}-1}{x-4} = \left[\frac{\sqrt{4-3}-1}{4-4}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$$

SI "RAZIONALIZZA" IL NUMERATORE MOLTIPLICANDO E DIVIDENDO PER $\sqrt{x-3}+1$:

$$\lim_{x \to 4} \frac{\left(\sqrt{x-3}-1\right)\left(\sqrt{x-3}+1\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x-3}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\cancel{(x-3-1)}}{\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{x-3}+1\right)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

PROVACI TU...

1) $$\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{\sqrt{7-x}-3} = -6$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2+x-2} = -\frac{1}{12}$$