Color est e pluribus unus

corso di Matematica
prof. Claudio Desiderio

Modulo 2: Il gioco dei Limiti
Funzioni reali di variabile reale
Parte A: limiti
Unita' 2 : limiti esponenziali e logaritmici

- **Limiti esponenziali (2 casi)**
- **Limiti esponenziali e grafico**
- **Limiti logaritmici (2 casi)**
- **Limiti "logaritmici" e grafico**

"Non accontentarti di restare nel GRIGIO per paura
del NERO, ma punta dritto al BIANCO..
e tuffati dentro!
Entra nel vortice.. quindi, rallenta:
ritroverai tutti i COLORI
e farai splendere sempre la tua Vita!!"

Limiti di funzioni esponenziali

Osservazione (per capire un po'!!)

Ragionamenti mentali

$$2^{+\infty} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{\infty \text{ VOLTE}} = +\infty$$

INVECE ... STRANO, MA VERO!

$$2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0^{+}$$

SE COME BASE CONSIDERIAMO $\frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0^{+}$$

INVECE, QUESTA VOLTA

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^{+\infty} = +\infty$$

UTILIZZANDO LE PROPRIETÀ DELLE POTENZE

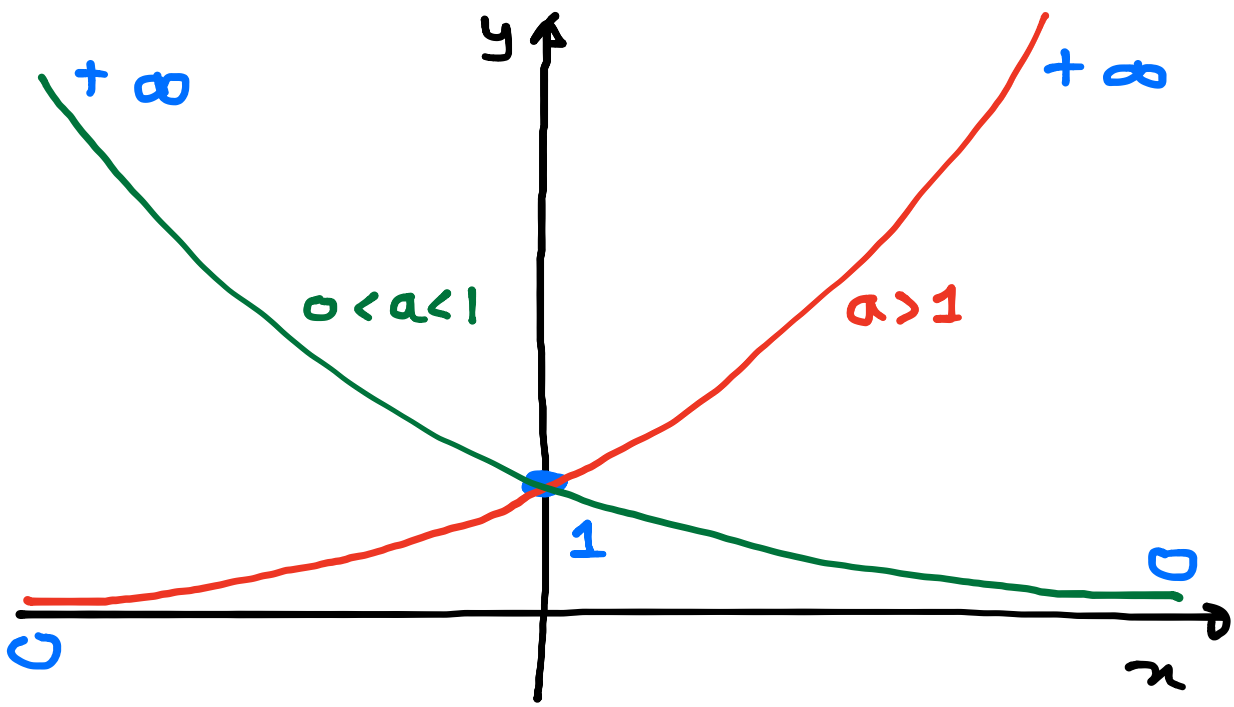
N.B. SI POSSONO QUINDI DISTINGUERE 2 CASI : $a > 1$ E $0 < a < 1$

Generalizzando in breve...

$$a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{SE } a>1 \\ 0^{+} & \text{SE } 0<a<1 \end{cases}$$

$$a^{-\infty} = \begin{cases} 0^{+} & \text{SE } a>1 \\ +\infty & \text{SE } 0<a<1 \end{cases}$$

QUESTI RISULTATI SI POSSONO GIUSTIFICARE CON IL GRAFICO DELLA FUNZIONE ESPONENZIALE



ESEMPI

1) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2-3x}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2-3(-\infty)}\right]=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}\right]=0^+$$

2) $$\lim_{x\to-1^+}\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}=\left[\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{-2}{-0{,}9+1}}\right]=\left[\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{-2}{0^+}}\right]=$$

$$=\left[\left(\frac{5}{4}\right)^{-\infty}\right]=0^+$$

$\frac{5}{4}>1$

3) $$\lim_{x\to-\infty}3^{\frac{2-3x^2}{x+1}}=\left[3^{\frac{\infty}{\infty}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}3^{\frac{-3x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}}=\left[3^{+\infty}\right]=+\infty$$

PROVACI TU...

a) $$\lim_{x\to2^+}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x^2-4x+4}{x^2+x-6}}$$

b) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2-3x-6x^2}{5-6x}}$$

Un caso difficile...

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2^x-1}{3-4^x} = \left[\frac{2^{-\infty}-1}{3-4^{-\infty}}\right] = \left[\frac{0-1}{3-0}\right] = -\frac{1}{3}$$

MA...

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x-1}{3-4^x} = \left[\frac{2^{+\infty}-1}{3-4^{+\infty}}\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

VALE LA LEGGE DEL PIÙ FORTE

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{+2^x}{-4^x} = \lim_{x\to+\infty} -\left(\frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{4}_{\,2}}\right)^x = -\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0^-$$

OPPURE SI PUÒ APPLICARE LA LEGGE DEL PIÙ FORTE :

4^x È PIÙ FORTE DI 2^x

$\Rightarrow$ È PIÙ FORTE ∞ AL DENOMINATORE QUINDI FA ZERO.

ESEMPIO : ATTENZIONE AL PIU' FORTE

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3^{2x}-4^x}{5^x-2^{3x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9^x-4^x}{5^x-8^x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{+9^x}{-8^x} = \left[\frac{+\infty}{-\infty}\right] = -\infty$$

CONFRONTO TRA INFINITI

$a>1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^m}{a^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^m} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = +\infty$$

L'INFINITO ESPONENZIALE
E' IL PIU' FORTE DI TUTTI

ESEMPIO

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-9}{4-2^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{+x^3}{-2^x} = 0^-$$

Limiti logaritmici

Ragionamenti "mentali"

Esempi pratici

$\log_2 +\infty = +\infty$ INFATTI $2^{+\infty} = +\infty$

$\log_2 0^+ = -\infty$ INFATTI $2^{-\infty} = 0^+$

AL CONTRARIO SE CONSIDERIAMO LA BASE $0<a<1$

$\log_{1/2} +\infty = -\infty$ INFATTI $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = +\infty$

$\log_{1/2} 0^+ = +\infty$ INFATTI $\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0^+$

N.B.

$\nexists \log_a -\infty$

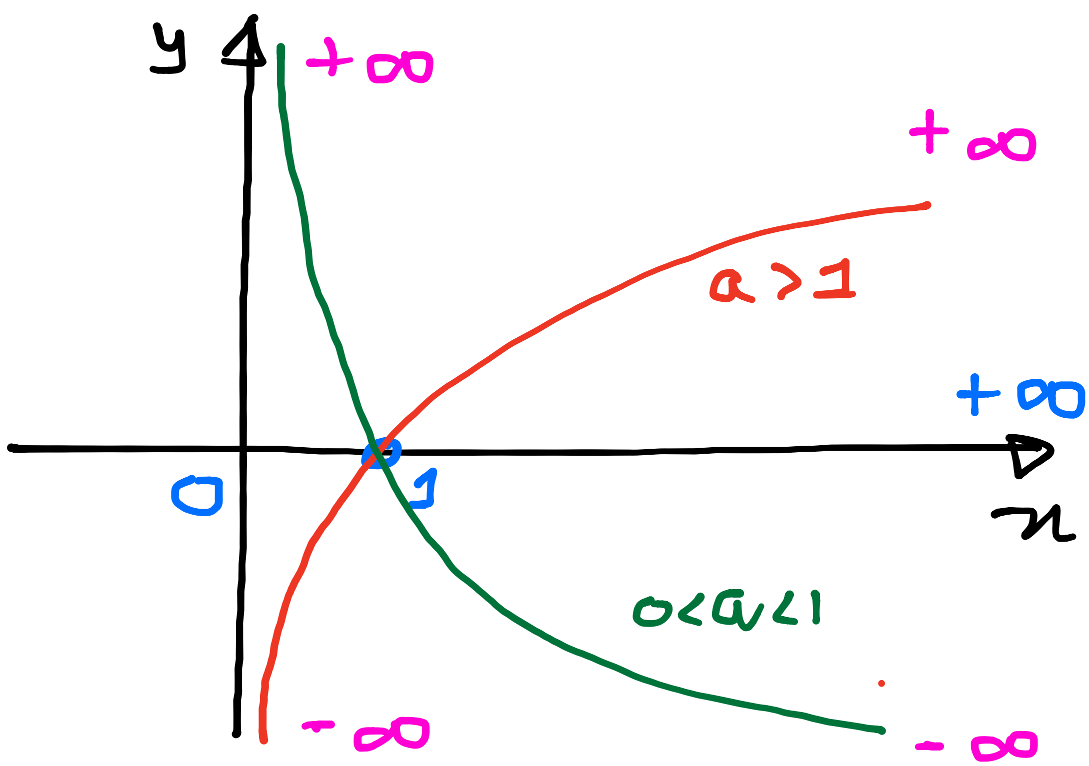
L'ARGOMENTO DI UN LOG. DEVE ESSERE MAGGIORE DI ZERO

Generalizzando...

$$\log_a +\infty = \begin{cases} +\infty & \text{SE } a>1 \\ -\infty & \text{SE } 0<a<1 \end{cases}$$

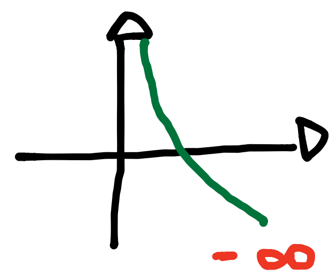
$$\log_a 0^+ = \begin{cases} -\infty & \text{SE } a>1 \\ +\infty & \text{SE } 0<a<1 \end{cases}$$

QUESTI RISULTATI SI POSSONO DEDURRE DAL GRAFICO DELLA FUNZIONE LOGARITMICA:



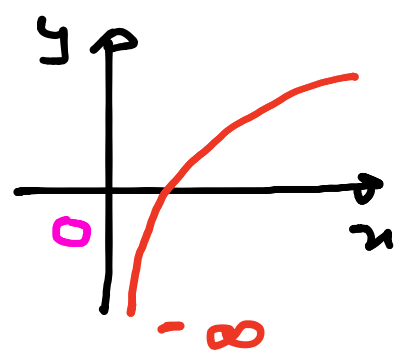
ESEMPI

1) $$\lim_{x\to 1^+} \log_{1/3} \frac{x+2}{x-1} = \left[\log_{1/3} \frac{3}{0^+}\right] = \left[\log_{1/3} +\infty\right] = -\infty$$



2) $$\lim_{x\to -\infty} \log_{\frac{3}{2}} \frac{3-2x}{4x^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \log_{\frac{3}{2}} \frac{-2\cancel{x}}{4x^{\cancel{2}}} = \left[\log_{\frac{3}{2}} \frac{-2}{-\infty}\right] = \left[\log_{\frac{3}{2}} 0^+\right] = -\infty$$



EX 3

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x - 2\ln x + 1}{4 - \ln^2 x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \qquad \ln^2 x = (\ln x)^2$$

APPLICHIAMO LA LEGGE DEL PIÙ FORTE

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{\ln^2 x}}{-\cancel{\ln^2 x}} = -1$$

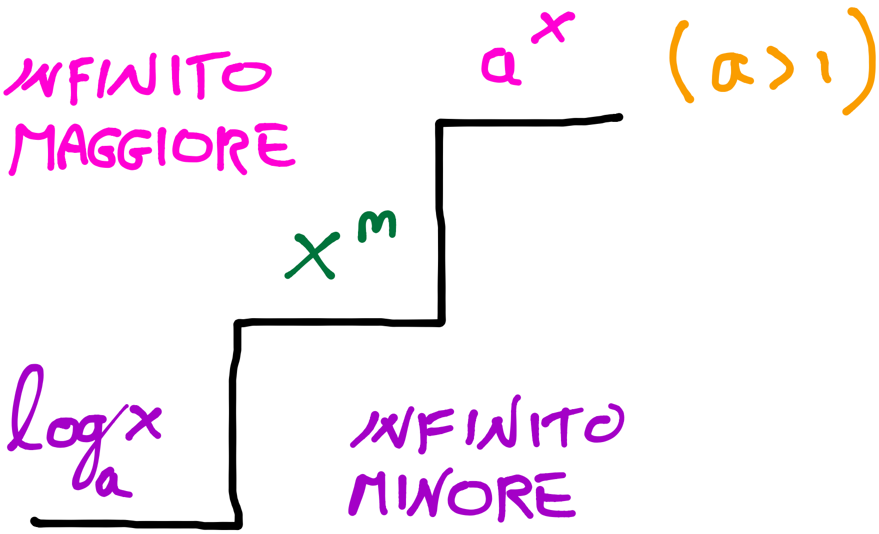
EX 4

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{4 - \underbrace{\log_2 x}_{=\infty}}{\underbrace{4\log_2^2 x}_{(-\infty)^2} - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

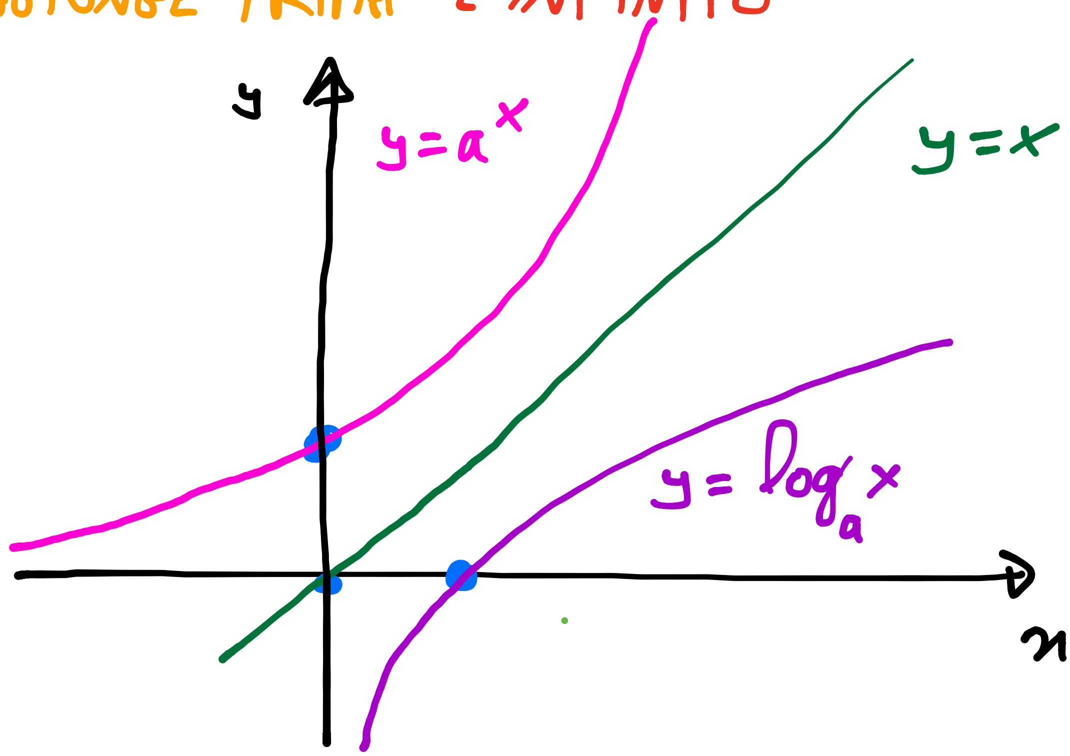
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\cancel{\log_2 x}}{4\log_2^{\cancel{2}} x} = \left[\frac{-1}{4\log_2 0^+}\right] = \left[\frac{-1}{-\infty}\right] = 0^+$$

$$\left[\log_2 0^+ = -\infty\right] \qquad \log_2^2 x = (\log_2 x)^2$$

Scala dell'infinito



SI PUÒ SPIEGARE ATTRAVERSO I GRAFICI: LA FUNZIONE ESPONENZIALE RAGGIUNGE PRIMA L'INFINITO



ESEMPI

1) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x - 1}{x^2 - 4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0^+$$

2) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - \ln x - 1}{x^3 - 8} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$$

3) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_2 x - 2^x + 1}{x^3 + 4^x - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2^x}{+4^x} = 0^-$$

RICORDA...

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \begin{cases} \infty & \text{SE È PIÙ FORTE IL NUMERATORE} \\ m & \text{STESSO } \infty \\ 0 & \text{SE È PIÙ FORTE IL DENOMINATORE} \end{cases}$$

4) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3e^{2x} + 1}{e^x - 2e^{2x} + \ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-3\cancel{e^{2x}}}{-2\cancel{e^{2x}}} = +\frac{3}{2}$$

Adesso provaci tu....

1) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{3\log_{1/2} x - 1}{4\log^2_{1/2} x + 3} = 0^+$$

2) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{3\log_{1/2} x - 1}{4\log^2_{1/2} x + 3} = 0^-$$

3) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{3\log_{1/2} x - x}{4\log^2_{1/2} x + 3} = -\infty$$

4) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{3\log_{1/2} x - x}{4\log^2_{1/2} x + 3^x} = 0^-$$

5) $$\lim_{x\to -\infty} \log_{1/2} \frac{5^x - x^2 + 1}{3^{2x} - 2x^2 + 3} = +\infty$$