Color est e pluribus unus

corso di Matematica

prof. Claudio Desiderio

Modulo 2: Il gioco dei Limiti
Funzioni reali di variabile reale
Parte A: limiti
Unita' 1 B : infinito su infinito

- **L'infinito "assorbe tutto"!**
- **n su infinito**
- **Forma indeterminata infinito su infinito**
- **Alcuni "trucchi" per velocizzare il calcolo**

"Non accontentarti di restare nel GRIGIO per paura
del NERO, ma punta dritto al BIANCO..
e tuffati dentro!
Entra nel vortice.. quindi, rallenta:
ritroverai tutti i COLORI
e farai splendere sempre la tua Vita!!"

Limiti per x tendente ad infinito

Regole veloci (l'infinito "assorbe" tutto!!!)

$\boxed{k \cdot \infty = \infty}$ $\qquad k \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{SE } k > 0 \\ +\infty & \text{SE } k < 0 \end{cases}$

$\infty \pm k = \infty$

$\boxed{\dfrac{\infty}{m} = \infty}$ (VALE LA REGOLA DEI SEGNI)

$\boxed{\infty^m = \infty}$ $\qquad (-\infty)^m = \begin{cases} +\infty & m \text{ PARI} \\ -\infty & m \text{ DISPARI} \end{cases}$

ESEMPIO

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(3x^3 - 2\right) = \left[3(-\infty)^3 - 2\right] = \left[3(-\infty) - 2\right] = *$

ALLA x SI SOSTITUISCE ∞ COME SE FOSSE UN NUMERO

$* = \left[-\infty - 2\right] = -\infty$

ANCHE DIRETTAMENTE... $\lim\limits_{x \to \infty} \left(4x^3 - 5\right) = \infty$

$$\frac{\infty}{n} \rightarrow \infty \qquad \text{E} \qquad \frac{n}{\infty} \rightarrow 0$$

INFATTI..

$$\frac{1}{100} = 0{,}01 \qquad \frac{1}{10.000} = 0{,}0001 \ldots$$

ESEMPIO

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4}{2x^2-5} = \left[\frac{4}{2(-\infty)^2-5}\right] = \left[\frac{4}{+\infty-5}\right] =$$

$$= \left[\frac{+4}{+\infty}\right] = 0^+$$

FORMA INDETERMINATA $[+\infty - \infty]$

METODO LENTO

(SI METTE IN EVIDENZA LA x DI GRADO MASSIMO)

EX $\lim_{x \to +\infty} \left(4x^2 - 5x + 1\right) = [+\infty - \infty]$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} x^2 \left(4 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} 4x^2 = +\infty$$

$\frac{5}{x} \rightarrow 0 \qquad \frac{1}{x^2} \rightarrow 0$

METODO VELOCE...

SI CONSIDERA SOLO LA x DI GRADO MASSIMO

ESEMPI

1) $$\lim_{x \to -\infty} \left(3x^4 - 2x^2 + 5x - 1\right) = [+\infty - \infty]$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} 3x^4 = +\infty$$

2) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{5}{4 + 2x - x^3} = \left[\frac{5}{4 + \infty - \infty}\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{-x^3} = \left[\frac{+5}{-\infty}\right] = 0^-$$

FORMA INDETERMINATA $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

SI APPLICA IL
METODO DEL PIÙ FORTE
OVVERO SI CONSIDERANO SOLO
I TERMINI CON x DI GRADO
MASSIMO

ESEMPI

1) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2-3x+2}{5-3x-6x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4\cancel{x^2}}{-6\cancel{x^2}} = \frac{\cancel{4}\,2}{-\cancel{6}\,3} = -\frac{2}{3}$$

N.B. NUMERATORE E DENOMINATORE HANNO LO STESSO GRADO, BASTERÀ CONSIDERARE IL RAPPORTO TRA I COEFFICIENTI

EX2. $$\lim_{x \to \infty} \frac{7x^3+2x-1}{5-2x^3+x^2} = \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2}$$

SE È PIÙ GRANDE IL GRADO DEL DENOMINATORE...

EX. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x-2}{3x^2+x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{5\cancel{x}}{3x^{\cancel{2}}} = \left[\frac{5}{+\infty}\right] = 0^+$$

... IL LIMITE FARÀ SEMPRE ZERO

EX. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{8-3x}{x^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = \left[\frac{-3}{-\infty}\right] = 0^+$$

SE INFINE È PIÙ GRANDE IL GRADO DEL NUMERATORE ALLORA IL LIMITE FARÀ INFINITO

EX. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^4+2x^2-1}{3+x-x^2-x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^{\cancel{4}}}{\cancel{-x^3}} = \left[\frac{+\infty}{-1}\right] = -\infty$$

E ADESSO PROVACI TU...

1) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{5x-3}{2x+1} = \dfrac{5}{2}$

2) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2-3}{2x+1} = +\infty$

3) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{5x-3}{2x^2+1} = 0^-$

6) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{7-3x-2x^2}{4x-5x^2} = \dfrac{2}{5}$

7) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{7-3x}{4x-2x^2} = 0^-$

8) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{4-2x^3}{5x-3x^2} = +\infty$

9) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{6-2x-3x^3}{2+4x^3-x} = -\dfrac{3}{4}$

IL CASO DELLE FUNZIONI IRRAZIONALI

N.B. $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{SE } x \to +\infty \\ -x & \text{SE } x \to -\infty \end{cases}$

EX. $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-3x}}{3x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2}}{3x} =$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2|x|}{3x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2\cancel{x}}{3\cancel{x}} = -\frac{2}{3}$

EX. $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2-x} - 2x}{4-5x} \quad \left[\frac{+\infty - \infty}{\infty}\right] =$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2} - 2x}{4-5x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x-2x}{4-5x} =$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{-5x}{-5x} = 1$

$\sqrt{9x^2} = 3\sqrt{x^2} = 3|x| \begin{cases} -3x \\ +3x \end{cases}$

PROVACI TU...

EX

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - 2x}{3x+1} = -\frac{2}{3}$

UN CASO PIU' DIFFICILE

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{4x^2+x}}{\sqrt{9x^2-9}+3x-1} = \left[\frac{+\infty-\infty}{+\infty-\infty}\right]$$

SE LO RISOLVIAMO CON LA "LEGGE DEL PIU' FORTE" ...

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2}-\sqrt{4x^2}}{\sqrt{9x^2}+3x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x+2x}{-3x+3x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\sqrt{4x^2} = 2|x| = -2x \quad (x \to -\infty) \qquad \sqrt{9x^2} = -3x \quad (x \to -\infty)$$

QUESTA STRADA NON E' PERCORRIBILE!

OCCORRE TROVARE UN' ALTRA VIA ...

POSSIAMO PROVARE A RAZIONALIZZARE CREANDO SOMME PER DIFFERENZE E QUINDI DIFFERENZE DI QUADRATO

$$\lim_{x \to -\infty} \overbrace{\frac{\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{4x^2+x}}{\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{4x^2+x}} \cdot \frac{\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{4x^2+x}}{}}\underbrace{\frac{}{\sqrt{9x^2-9}+(3x-1)} \cdot \frac{\sqrt{9x^2-9}-(3x-1)}{\sqrt{9x^2-9}-(3x-1)}} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{4x^2} - 1 - \cancel{4x^2} - x}{\underbrace{\sqrt{4x^2-1}}_{-2x} + \underbrace{\sqrt{4x^2+x}}_{-2x}} \cdot \frac{\overbrace{\sqrt{9x^2-9}}^{-3x} - \overbrace{(3x-1)}^{-3x}}{\underbrace{9x^2-9-(3x-1)^2}_{\cancel{9x^2}-9-\cancel{9x^2}+6x-1}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \underbrace{\frac{-1-x}{-4x}}_{\to \frac{1}{4}} \cdot \underbrace{\frac{-6x}{6x-10}}_{\to -1} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (-1) = -\frac{1}{4}$$

E ADESSO PROVACI TU...

1) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x-1-\sqrt{16x^2-x}}{\sqrt{25x^2+10x} - 5x}$$

2) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{27x^3-1} - 3x}{x - \sqrt[2]{x^2+4x}}$$