

Color est e pluribus unus

corso di Matematica

prof. Claudio Desiderio

Modulo 2: Il gioco dei Limiti

Funzioni reali di variabile reale

Parte A: limiti

Unità 1 B : infinito su infinito

- L'infinito "assorbe tutto"!
- n su infinito
- Forma indeterminata infinito su infinito
- Alcuni "trucchi" per velocizzare il calcolo

"Non accontentarti di restare nel GRIGIO per paura del NERO, ma punta dritto al BIANCO..
e tuffati dentro!

Entra nel vortice.. quindi, rallenta:

ritroverai tutti i COLORI

e farai splendere sempre la tua Vita!!"

Limiti per x tendente ad infinito

Regole veloci (l'infinito "assorbe" tutto!!!)

$$\boxed{k \cdot \infty = \infty} \quad k \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{SE } k > 0 \\ +\infty & \text{SE } k < 0 \end{cases}$$

$$\infty \pm k = \infty$$

$$\boxed{\frac{\infty}{n} = \infty} \quad (\text{VALE LA REGOLA DEI SEGNI})$$

$$\boxed{\infty^m = \infty} \quad (-\infty)^m = \begin{cases} +\infty & m \text{ PARI} \\ -\infty & m \text{ DISPARI} \end{cases}$$

ESEMPIO

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 2) = \underset{\uparrow}{\left[3(-\infty)^3 - 2 \right]} = \left[3(-\infty) - 2 \right] = *$$

ALLA * SI SOSTITUISCE ∞ COME SE FOSSE UN NUMERO

$$* = \left[-\infty - 2 \right] = -\infty$$

ANCHE DIRETTAMENTE.. $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x^3 - 5) = \infty$

$$\frac{\infty}{n} \rightarrow \infty \quad \text{E} \quad \left(\frac{n}{\infty} \rightarrow 0 \right)$$

INFATTI...

$$\frac{1}{100} = 0,01$$

$$\frac{1}{10.000} = 0,0001 \dots$$

ESEMPIO

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{2x^2 - 5} &= \left[\frac{4}{2(-\infty)^2 - 5} \right] = \left[\frac{4}{+\infty - 5} \right] = \\ &= \left[\frac{+4}{+\infty} \right] = 0^+ \end{aligned}$$

FORMA INDETERMINATA $[+\infty - \infty]$

METODO LENTO

(SI METTE IN EVIDENZA LA x
DI GRADO MASSIMO)

$$\begin{aligned} \text{EX } \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^2 - 5x + 1) &= [+\infty - \infty] \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(4 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^2 = +\infty \end{aligned}$$

METODO VELOCE...

SI CONSIDERA SOLO LA

x DI GRADO MASSIMO

ESEMPI

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4 - 2x^2 + 5x - 1) = [+ \infty - \infty]$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^4 = + \infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{4 + 2x - x^3} = \left[\frac{5}{4 + \infty - \infty} \right] =$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{-x^3} = \left[\frac{+5}{-\infty} \right] = 0^-$$

FORMA INDETERMINATA $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$
SI APPLICA IL
METODO DEL PIÙ FORTE
OVVERO SI CONSIDERANO SOLO
I TERMINI CON x DI GRADO
MASSIMO

ESEMPI

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 3x + 2}{5 - 3x - 6x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2}{-6x^2} =$$

N.B. NUMERATORE E DENOMINATORE
HANNO LO STESSO GRADO,
BASTERA CONSIDERARE IL RAPPORTO
TRA I COEFFICIENTI

$$\text{EX2. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 2x - 1}{5 - 2x^3 + x^2} = \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2}$$

SE E' PIU' GRANDE IL GRADO DEL
DENOMINATORE...

$$\text{EX. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 2}{3x^2 + x - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{3x^2} = \left[\frac{5}{+\infty} \right] = 0^+$$

... IL LIMITE FARÀ SEMPRE ZERO

$$\text{EX. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8 - 3x}{x^2 + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x^2} = \left[\frac{-3}{-\infty} \right] = 0^+$$

SE INFINE E' PIU' GRANDE IL GRADO
DEL NUMERATORE ALLORA IL LIMITE
FARÀ INFINITO

$$\text{EX. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 + 2x^2 - 1}{3 + x - x^2 - x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4}{-x^3} = \left[\frac{+\infty}{-1} \right] = -\infty$$

E ADESSO PROVACI TU...

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-3}{2x+1} = \frac{5}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2-3}{2x+1} = +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-3}{2x^2+1} = 0^-$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7-3x-2x^2}{4x-5x^2} = \frac{2}{5}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7-3x}{4x-2x^2} = 0^-$$

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-2x^3}{5x-3x^2} = +\infty$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6-2x-3x^3}{2+4x^3-x} = -\frac{3}{4}$$