

Color est e pluribus unus

corso di Matematica

prof. Claudio Desiderio

Modulo 2: Il gioco dei Limiti

Funzioni reali di variabile reale

Parte A: limiti

Unita' 1 C : limiti di funzioni irrazionali

- Osservazioni sulla radice di x^2 !
- Forma indeterminata piu' infinito meno infinito
- Alcuni esempi

"Non accontentarti di restare nel GRIGIO per paura
del NERO, ma punta dritto al BIANCO..
e tuffati dentro!

Entra nel vortice.. quindi, rallenta:
ritroverai tutti i COLORI
e farai splendere sempre la tua Vita!!"

IL CASO DELLE FUNZIONI IRRAZIONALI

N.B. $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{SE } x \rightarrow +\infty \\ -x & \text{SE } x \rightarrow -\infty \end{cases}$

EX. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3x}}{3x - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2}}{3x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2|x|}{3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{3x} = -\frac{2}{3}$$

EX. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - x} - 2x}{4 - 5x} = \left[\frac{+\infty - \infty}{-\infty} \right] =$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2} - 2x}{4 - 5x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x - 2x}{4 - 5x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x}{-5x} = 1$$

PROVACI TU...

EX

$$\sqrt{9x^2} = 3\sqrt{x^2} =$$

$$3|x| \begin{cases} -3x \\ 1+3x \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 2x}{3x + 1} = -\frac{2}{3}$$

UN CASO PIU' DIFFICILE

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-1} - \sqrt{4x^2+2x}}{\sqrt{9x^2-9} + 3x-1} = \begin{bmatrix} +\infty - \infty \\ + - \infty \end{bmatrix}$$

SE LO RISOLVIANO CON LA "LEGGE DEL PIU' FORTE" ...

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2} - \sqrt{4x^2}}{\sqrt{9x^2} + 3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + 2x}{-3x + 3x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{4x^2} = 2|x| = -2x \quad (\infty \rightarrow -\infty) \quad \sqrt{9x^2} = -3x \quad (\infty \rightarrow -\infty)$$

QUESTA STRADA NON E' PERCORRIBILE!

OCCORRE TROVARE UN' ALTRA VIA ...

POSSIAMO PROVARE A RAZIONALIZZARE
CREANDO SOMME PER DIFFERENZE E QUINDI
DIFFERENZE DI QUADRATO

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-1} + \sqrt{4x^2+x}}{\sqrt{4x^2-1} + \sqrt{4x^2+x}} \cdot \frac{\sqrt{4x^2-1} - \sqrt{4x^2+x}}{\sqrt{4x^2-1} - \sqrt{4x^2+x}} \cdot \frac{\sqrt{9x^2-9} - (3x-1)}{\sqrt{9x^2-9} - (3x-1)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2 - 1 - 4x^2 - x}{\sqrt{4x^2 - 1} + \sqrt{4x^2 + x}} \\
 &\quad \text{Simplify the numerator: } 6x^2 - 1 - 4x^2 - x = 2x^2 - x - 1 \\
 &\quad \text{Simplify the denominator: } \sqrt{4x^2 - 1} + \sqrt{4x^2 + x} \approx 2|x| - 1 + 2|x| + \frac{x}{2} \\
 &\quad \text{Factor the numerator: } (2x^2 - x - 1) = (2x + 1)(x - 1) \\
 &\quad \text{Factor the denominator: } 2|x| - 1 + 2|x| + \frac{x}{2} = 4|x| - 1 + \frac{x}{2} \\
 &\quad \text{Cancel common terms: } \frac{(2x + 1)(x - 1)}{4|x| - 1 + \frac{x}{2}} \\
 &\quad \text{Simplify: } \frac{(2x + 1)(x - 1)}{4|x| - 1 + \frac{x}{2}} \cdot \frac{-1}{-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 - x}{-4x} \\
 &\quad \text{Simplify: } \frac{-1 - x}{-4x} = \frac{1}{4} \cdot \frac{-1 - x}{-x} \\
 &= \frac{1}{4} \cdot (-1) = -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

E ADESSO PROVACI TU...

$$\begin{aligned}
 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 1 - \sqrt{16x^2 - x}}{\sqrt{25x^2 + 10x - 5x}} \\
 &\quad \text{Simplify: } \frac{4x - 1 - \sqrt{16x^2 - x}}{\sqrt{25x^2 + 10x - 5x}} \\
 &\quad \text{Factor out } x^2: \frac{4x - 1 - \sqrt{16x^2(1 - \frac{1}{16x})}}{\sqrt{25x^2(1 - \frac{10}{25x} + \frac{5}{x^2})}} \\
 &\quad \text{Cancel } x^2: \frac{4 - \frac{1}{x} - \sqrt{16(1 - \frac{1}{16x})}}{\sqrt{25(1 - \frac{10}{25x} + \frac{5}{x^2})}} \\
 &\quad \text{Simplify: } \frac{4 - \frac{1}{x} - \sqrt{16(1 - \frac{1}{16x})}}{\sqrt{25(1 - \frac{10}{25x} + \frac{5}{x^2})}} \\
 &\quad \text{As } x \rightarrow +\infty, \frac{1}{x} \rightarrow 0, \sqrt{16(1 - \frac{1}{16x})} \rightarrow 4, \sqrt{25(1 - \frac{10}{25x} + \frac{5}{x^2})} \rightarrow 5 \\
 &\quad \text{Result: } \frac{4 - 0 - 4}{5} = 0
 \end{aligned}$$