Color est e pluribus unus

corso di Matematica

prof. Claudio Desiderio

Modulo 2: Il gioco dei Limiti
Funzioni reali di variabile reale
Parte A: limiti

Unita' 3 : limiti di funzioni goniometriche

- **Limiti goniometrici semplici**
- **Limiti delle funzioni circolari inverse**

"Non accontentarti di restare nel GRIGIO per paura
del NERO, ma punta dritto al BIANCO..
e tuffati dentro!
Entra nel vortice.. quindi, rallenta:
ritroverai tutti i COLORI
e farai splendere sempre la tua Vita!!"

Limiti di funzioni goniometriche

Il primo passo è lo stesso:

ESEMPI

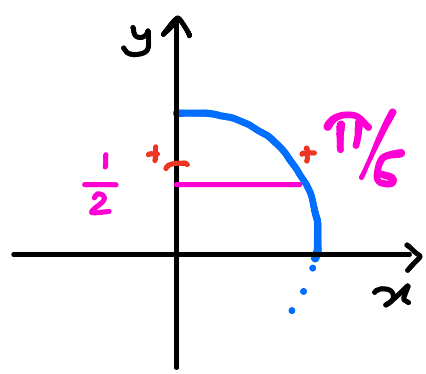
1) $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x} = \frac{\sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} + 1}{\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1 - 0 + 1}{1 + 0} = 2$$

2) $$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}^+} \frac{2\sin x + 1}{2\sin x - 1} = \left[\frac{2\sin\frac{\pi}{6} + 1}{2\sin\frac{\pi}{6} - 1}\right] = \left[\frac{\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + 1}{\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} - 1}\right] =$$

$$= \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

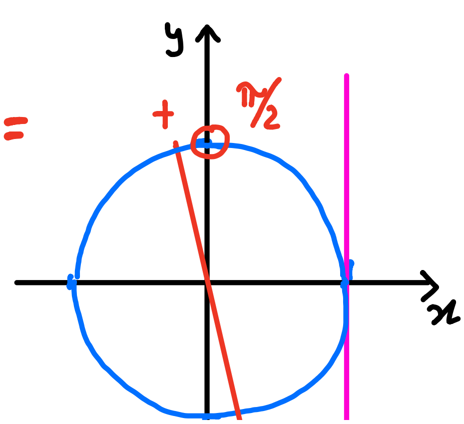
$2 \cdot 0{,}6 - 1 = 0^+$

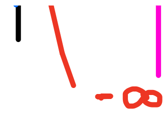


Attenzione alla Tangente

3) $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x + 1}{\tan x + 1} = \left[\frac{1 + 1}{-\infty}\right] =$$

$$= 0^-$$





E ANCORA... EX 4.

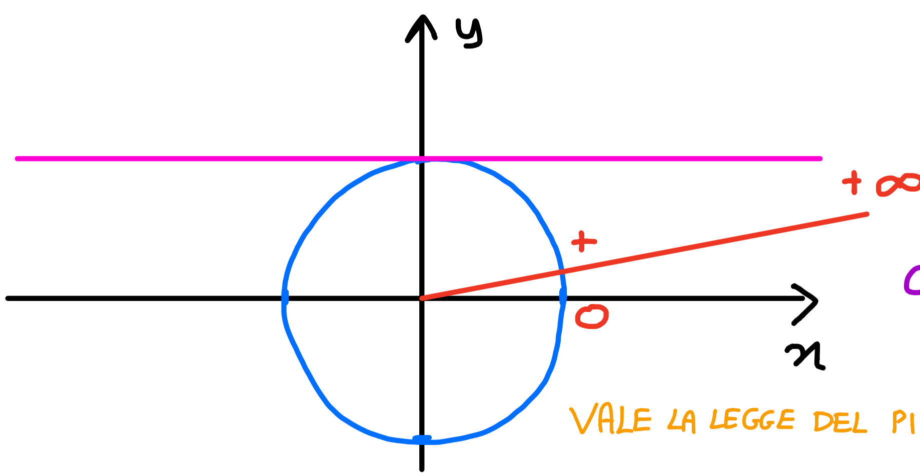
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\tan x-\sqrt{3}}{2\tan x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$\left[\tan\frac{\pi}{2}=\infty\right]$$

"VALE LA LEGGE DEL PIÙ FORTE"

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\cancel{\tan x}}{2\cancel{\tan x}} = \frac{3}{2}$$

5) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{3}\cot x-3}{1-\cot^2 x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$



$\cot 0^+ = +\infty$

VALE LA LEGGE DEL PIÙ FORTE!

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{3}\,\cancel{\cot x}}{-\cot^{\cancel{2}} x} = \left[\frac{\sqrt{3}}{-(+\infty)}\right] = 0^-$$

PROVACI TU...

1) $$\lim_{x\to\pi^+}\frac{1-\sin x}{1+\cos x}=$$

2) $$\lim_{x\to2\pi^+}\frac{2\sin^2 x-\sin x}{2\sin^2 x+\sin x}=$$

3) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{3\tan x-\sqrt{3}\tan^2 x}{\operatorname{tg} x-1}$$

4) $$\lim_{x\to\pi^-}\frac{4\cot x-4\cot^2 x}{1+\cot^2 x}$$

5) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^+}\frac{4\cos^2 x-1}{4\cos^2 x-4\cos x+1}$$

6) $$\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi^-}\frac{1-\tan x}{3\tan^2 x-\sqrt{3}}$$

Limiti di funzioni circolari inverse

$(\arcsin x\ ;\ \arccos x\ ;\ \arctan x)$

RICORDA: $\arcsin x$ e $\arccos x$ SONO DEFINITI SOLO IN $[-1;1]$

$\arcsin(0)=0$; $\arccos 0=\frac{\pi}{2}$; $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$
$\arccos 1=0$; $\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$; etc...

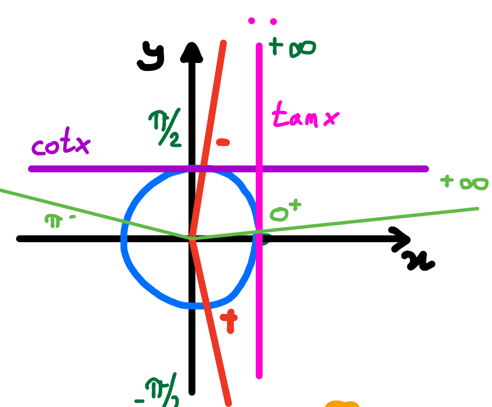
1) $\lim_{x\to+\infty} \arcsin \frac{3-x}{x^2+9} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$

$= \lim_{x\to+\infty} \arcsin \frac{-\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = \arcsin 0^- = 0^-$

.. e soprattutto ricorda

$\arctan(+\infty)=\frac{\pi}{2}^-$

$\arctan(-\infty)=-\frac{\pi}{2}^+$



ANALOGAMENTE..

$\text{arccot}(+\infty)=0^+$ $\quad \text{arccot}(-\infty)=\pi^-$

EX. $\lim_{x\to 3^+} \arctan \frac{x^2-2x-3}{x^2-6x+9} = \arctan\left[\frac{9-6-3}{9-18+9}\right]$ $\%$

$\lim_{x\to 3^+} \arctan \frac{\cancel{(x-3)}(x+1)}{(x-3)^{\cancel{2}}} = \left[\frac{4}{0^+}\right] \doteq \left[\arctan +\infty\right] = \frac{\pi}{2}^-$

E adesso provaci tu....

$\lim_{x\to -4^-} \operatorname{arcot} \frac{x^2+8x+16}{x^2-16} =$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\arctan x + \pi/2}{\arctan x - \pi/2}$ (RIPROVARE CON $x\to -\infty$)

$\lim_{x\to +\infty} \arctan \frac{e^x - x^3}{3^{2x}+1} =$
$(x\to -\infty)$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{arcot} x}{\pi - \operatorname{arcot} x} =$
$(x\to -\infty)$