Color est e pluribus unus

corso di Matematica

prof. Claudio Desiderio

Modulo 3: Limiti notevoli
Funzioni reali di variabile reale

Unita' 1 : limiti notevoli neperiani

- Forma indeterminata $[1]^{\infty}$
- Forma base per x tendente ad infinito
- Forma secondaria per x tendente a zero
- Generalizzazioni, trucchi e supertrucchi

"Non accontentarti di restare nel GRIGIO per paura
del NERO, ma punta dritto al BIANCO..
e tuffati dentro!
Entra nel vortice.. quindi, rallenta:
ritroverai tutti i COLORI
e farai splendere sempre la tua Vita!!"

Limiti notevoli neperiani: forma base

NEPERIANI: FORMA INDETERMINATA $[1^\infty]$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = [1^\infty] \overset{DEF}{=\!=} e$$

QUESTO LIMITE RAPPRESENTA PROPRIO LA DEFINIZIONE DEL NUMERO DI NEPERO.

ESEMPI

1) $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{2x} = [1^\infty] = *$$

DOBBIAMO RICONDURLO ALLA FORMA PRINCIPALE

$$* = \lim_{x\to+\infty}\underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right]}_{e}{}^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}}$$

DIVIDO E MOLTIPLICO PER 3.

2) $$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{4x}\right)^{6x} = \left[1^{\infty}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{4}{3}x}\right)^{-\frac{4}{3}x}\right]}_{e}{}^{-\frac{3}{4}6} =$$

$$= e^{-\frac{3}{\cancel{4}_{2}}\cdot\cancel{6}^{3}} = e^{-\frac{9}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^{9}}} = \frac{1}{e^{4}\sqrt{e}}$$

GENERALIZZANDO:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{\beta x}\right)^{\gamma x} = e^{\frac{\alpha}{\beta}\gamma}$$

Ex 3) $$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{2x}\right)^{3x} = \left[1^{\infty}\right] = e^{\frac{-5}{2}\cdot 3}$$

$$= e^{-\frac{15}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^{15}}}$$

Limiti notevoli neperiani: forma secondaria

Per x tendente a zero

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = [1^{\infty}] = e$$

INFATTI:

SI PONE $x = \frac{1}{t}$ DA CUI $\frac{1}{x} = t$

SE $x \to 0$ ALLORA $t \to \infty$

IL LIMITE DIVENTA:

$$\lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t} = e$$

EX.:

1) $$\lim_{x \to 0} (1+2x)^{\frac{1}{3x}} = [1^{\infty}] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2}$$

Generalizzazioni

$$\lim_{x \to 0} (1 + \alpha x)^{\frac{1}{\beta x}} = e^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

EX

$$\lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{2}{3}x\right)^{\frac{5}{4x}} = [1^{\infty}] = e^{\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}} =$$

$$= e^{-\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}} = e^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{e^5}}$$

PROVACI TU...

1) $\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{4}{3x}\right)^{2x} =$

2) $\lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{5}{3}x\right)^{-\frac{2}{7x}} =$

Un caso interessante

EX

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x-2}\right)^{\frac{5x^2+x}{4x+1}} = \left[1^{\infty}\right]$$

DOBBIAMO RICONDURLO ALLA

FORMA PRINCIPALE $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

SI SOMMA E SI SOTTRAE 1

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\underbrace{\frac{3x+4}{3x-2}-1}_{\text{SI SOMMANO}}\right)^{\frac{5x^2+x}{4x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\overbrace{\cancel{3x}+4-\cancel{3x}+2}^{6}}{3x-2}\right)^{\frac{5x^2+x}{4x+1}} =$$

IL 6 SI PORTA AL DENOMINATORE

$$= \lim_{x \to \infty} \underbrace{\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3x-2}{6}} \right)^{\frac{3x-2}{6}} \right]}_{e}^{\frac{6}{3x-2} \cdot \frac{5x^2+x}{4x+1}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} e^{\frac{30x^2+\overbrace{6x}}{12x^2+\underbrace{3x-8x-2}}} = e^{\frac{30}{12}} = e^{\frac{5}{2}} = \sqrt{e^5}$$

SI POSSONO TRASCURARE

PROVACI SUBITO TU...

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{4x^2-x+1}{4x^2+2x-4} \right)^{\frac{5x^2-2x+1}{3x+4}}$$

PROVACI ANCORA TU

1) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{5x-3}{5x+2} \right)^{\frac{3x^2-1}{4x+1}} =$

2) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{6x^2-3x+2}{6x^2+4x-1} \right)^{4x-2}$

ATTENZIONE ALLE IMITAZIONI

EX. 1) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x-1}{2x+3}\right)^{\frac{5x^2-x}{4x+3}} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\infty}{\infty}}\right] =$

$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5x^{\cancel{2}}}{4\cancel{x}}} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty}\right] = +\infty$

EX 2) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{4x-3}{4x+2}\right)^{\frac{3x^2-2x+1}{2x^2+x-3}} = 1^{\frac{3}{2}} = 1$

PROVACI TU...

1) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{\frac{5x^2-1}{3x+2}}$

2) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{\frac{5x-1}{3x+2}}$

3) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+3}\right)^{\frac{5x-1}{3x^2+2}}$