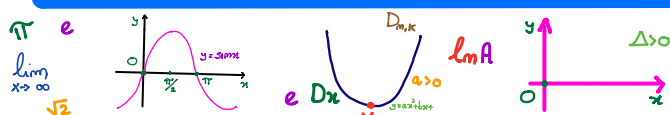


MATEMATICA A COLORI PER TUTTI

INTEGRALI INDEFINITI STEP 1

FLIPPED
MATH



WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

UNITÀ 1 PRIMO STEP

DEFINIZIONI E PRIME
REGOLE

$$\int x^d dx = \frac{x^{d+1}}{d+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

PREMESSA

DEFINIZIONE DI PRIMITIVA

SIA $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

CHIAMIAMO PRIMITIVA DI $f(x)$

LA FUNZIONE $F(x)$ TALE CHE :

$$DF(x) = f(x)$$

ESEMPI

1. $f(x) = 2x$ $F(x) = ?$ FACILE!!

$$F(x) = x^2$$

2. $f(x) = e^x$ $F(x) = ?$ FACILISSIMO!!

$$F(x) = e^x$$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

SE $F(x)$ È UNA PRIMITIVA DI $f(x)$
ALLORA ANCHE $F(x) + C$ È UNA
PRIMITIVA DI $f(x)$

INFATTI :

$$D(F(x) + C) = DF(x) + D_C = f(x) + 0$$

E PRECISAMENTE DIREMO CHE :

$F(x) + C$ È L'INSIEME DI TUTTE E SOLE
LE PRIMITIVE DI $f(x)$

DEFINIZIONE DI INTEGRALE INDEFINITO

SIA $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

CHIAMIAMO INTEGRALE INDEFINITO DI $f(x)$

L'INSIEME DI TUTTE E SOLE LE PRIMITIVE DI $f(x)$,
E SCRIVEREMO:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

CHE SI LEGGE: INTEGRALE DI $f(x)$ IN
DE x (RISPETTO AD x)

N.B. dx E' IL DIFFERENZIALE DI x

ESEMPI (INTEGRALI IMMEDIATI)

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad (D \sin x = \cos x)$$

$$\int 1 dx = x + C$$

REGOLA DELLA POTENZA DALLA REGOLA DI DERIVAZIONE:

$$Dx^m = m x^{m-1}$$

SI DEDUCE:

$$\int x^d dx = \frac{x^{d+1}}{d+1} + C$$

INFATTI:

$$\begin{aligned} D \frac{x^{d+1}}{d+1} &= D \frac{1}{\underbrace{d+1}_{\text{COSTANTE}}} x^{d+1} = \\ &= \frac{1}{\cancel{d+1}} \cdot \cancel{(d+1)} x^{d+1-1} = x^d \end{aligned}$$

ESEMPI

$$1. \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\left(\text{INFATTI: } D \frac{x^3}{3} = \frac{3x^2}{3} = x^2 \right)$$

$$2. \int x^1 dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\left(D \frac{x^2}{2} = \frac{2x}{2} = x \right)$$

$$3. \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

E COSÌ VIA ...

OPERAZIONI

SOMMA

DALLA REGOLA: $D(f(x)+g(x)) = f'(x) + g'(x)$

SI HA:

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

ESEMPI

$$1. \int e^x + 2x dx = \int e^x dx + \int 2x dx = e^x + x^2 + C$$

$$2. \int (\cos x + 1) dx = \int \cos x dx + \int 1 dx = \sin x + x + C$$

PRODOTTO DI UNA COSTANTE PER UNA FUNZIONE

DALLA REGOLA: $D(k \cdot f(x)) = k \cdot Df(x)$

SI DEDUCE:

$$\int k f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

È UNA REGOLA IMPORTANTISSIMA !!!

ESEMPI

$$1. \int 3x^4 dx = 3 \int x^4 dx = 3 \frac{x^5}{5} + c$$

$$2. \int (5x^2 - 3x + 2) dx =$$

$$= 5 \int x^2 dx - 3 \int x' dx + 2 \int 1 dx =$$

$$= 5 \frac{x^3}{3} - 3 \frac{x^2}{2} + 2x + c$$

UN'APPLICAZIONE IMPORTANTE

RICORDANDO UNA NOTA PROPRIETÀ

DELLE POTENZE:

$$\frac{1}{x^m} = x^{-m}$$

POSSIAMO RISOLVERE I SEGUENTI INTEGRALI:

$$1. \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c =$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$$

$$\begin{aligned}
 2. \int \frac{4}{3x^5} dx &= \frac{4}{3} \int x^{-5} dx = \frac{4}{3} \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \\
 &= \cancel{\frac{4}{3}} \frac{x^{-4}}{\cancel{-4}} + C = -\frac{1}{3x^4} + C
 \end{aligned}$$

ATTENZIONE A QUESTO ESEMPIO

$$\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \frac{x^{-1+1}}{\underbrace{-1+1}_0} + C$$

IMPOSS.

MA... SE RICORDATE...

$$D \ln x = \frac{1}{x}$$

ED ANCHE : $D \ln(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

QUINDI DEDUCIAMO CHE...

$$\boxed{\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C}$$

N.B. IL VALORE ASSOLUTO ASSICURA ANCHE L'ESISTENZA DEL LOGARITMO!

ESEMPI

$$1. \int \frac{2}{3x} dx = \frac{2}{3} \int \frac{1}{x} dx = \frac{2}{3} \ln|x| + C$$

IMPORTANTE ...

$$2. \int \frac{3x^2 - 5x + 2}{4x^2} dx =$$

POSSIAMO SCOMPORRE LA FRAZIONE

$$= \frac{3}{4} \int \frac{x^2}{x^2} dx - \frac{5}{4} \int \frac{x}{x^2} dx + \frac{2}{4} \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \frac{3}{4} x - \frac{5}{4} \ln|x| + \frac{1}{2} \frac{x^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \frac{3}{4} x - \frac{5}{4} \ln|x| - \frac{1}{2x} + C$$

ADESSO PROVACI TU...

1. $\int 3x^5 dx$

2. $\int \frac{3}{5x^4} dx$

3. $\int 9x^2 + \frac{5}{4x^2} dx$

4. $\int 5x^3 - 2x^2 + x - 3 dx$

5. $\int 8x^3 - 9x^2 + \frac{4}{3x^3} - \frac{8}{2x} dx$

6. $\int \frac{5x^4 - 3x^2 + 9}{4x^3} dx$

SOLUZIONI

$$1. \int 3x^5 dx = \frac{1}{2} x^6$$

$$2. \int \frac{3}{5x^4} dx = -\frac{1}{5x^3} + C$$

$$3. \int 9x^7 + \frac{5}{4x^2} dx = \frac{9}{8} x^8 - \frac{5}{24x} + C$$

$$4. \int 5x^3 - 2x^2 + x - 3 dx = \frac{5}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x + C$$

$$5. \int 8x^3 - 9x^2 + \frac{4}{3x^3} - \frac{8}{2x} dx = 2x^4 - 3x^3 - \frac{2}{3x^2} - \frac{8}{2} \ln|x| + C$$

$$6. \int \frac{5x^4 - 3x^2 + 9}{4x^3} dx = \frac{5}{8} x^2 - \frac{3}{4} \ln|x| - \frac{9}{8x} + C$$

UN' ULTIMA APPLICAZIONE
RICORDANDO LA PROPRIETÀ DELLE POTENZE

$$\sqrt[m]{x^m} = x^{\frac{m}{m}}$$

POSSIAMO RISOLVERE I SEGUENTI INTEGRALI:

$$1. \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$$

$$2. \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{-\frac{2}{3}} dx =$$

$$= \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3 \sqrt[3]{x} + C$$

ULTIMO ESEMPIO

$$\begin{aligned} & \int \frac{2\sqrt{x} - 3x + 5x^4}{4x^2} dx = \\ &= \frac{2}{4} \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx - \frac{3}{4} \int \frac{x}{x^2} dx + \frac{5}{4} \int \frac{x^4}{x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int x^{\frac{1}{2}-2} dx - \frac{3}{4} \int \frac{1}{x} dx + \frac{5}{4} \int x^2 dx = \\ & \quad \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \quad \quad -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} - \frac{3}{4} \ln|x| + \frac{5}{4} \frac{x^3}{3} + C = \\ &= \cancel{\frac{1}{2}} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \ln|x| + \frac{5}{12} x^3 + C = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{4} \ln|x| + \frac{5}{12} x^3 + C \end{aligned}$$

ADESSO PROVACI TU...

$$1. \int 3\sqrt[4]{x} \, dx =$$

$$2. \int \frac{3}{5\sqrt[4]{x^3}} \, dx =$$

$$3. \int \sqrt[8]{x^2} + \frac{5}{4\sqrt[5]{x^4}} \, dx =$$

$$4. \int \frac{3\sqrt{x} - 5}{2x} \, dx = 3\sqrt{x} - \frac{5}{2} \ln|x| + C$$

$$5. \int \frac{3x - \sqrt{x}}{2\sqrt[3]{x}} \, dx = \frac{9}{10} \sqrt[3]{x^5} - \frac{3}{2} \sqrt[6]{x^3} + C$$

CHIAMIAMO INTEGRALE INDEFINITO DI $f(x)$
L'INSIEME DI TUTTE E SOLE LE PRIMITIVE DI $f(x)$
E SCRIVEREMO:

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

$$\int x^d dx = \frac{x^{d+1}}{d+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int k f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

$$\frac{1}{x^m} = x^{-m}$$

$$\sqrt[m]{x^m} = x^{\frac{m}{m}}$$