Color est e pluribus unus

corso di Matematica

prof. Claudio Desiderio

Modulo 3: Limiti notevoli

Funzioni reali di variabile reale

Unita' 3:

limiti notevoli goniometrici

- Forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$
- Forma base
- Generalizzazioni, trucchi e supertrucchi

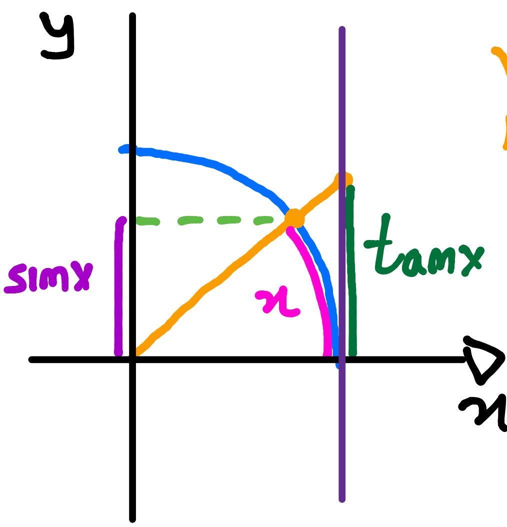
"Non accontentarti di restare nel GRIGIO per paura
del NERO, ma punta dritto al BIANCO..
e tuffati dentro!
Entra nel vortice.. quindi, rallenta:
ritroverai tutti i COLORI
e farai splendere sempre la tua Vita!!"

Primo limite notevole base (con seno)

① $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1$$

Dimostrazione

CONSIDERIAMO PER SEMPLICITÀ $x>0$;
RAPPRESENTANDO NELLA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA x, $\sin x$ E $\tan x$
(RICORDANDO I RISPETTIVI SIGNIFICATI GEOMETRICI)



VALE LA SEGUENTE RELAZIONE:

$$\sin x \le x \le \underbrace{\tan x}_{\frac{\sin x}{\cos x}}$$

DIVIDENDO PER $\sin x$:

$$\frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x}} \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x}$$

PASSANDO AI RECIPROCI, INVERTENDO IN TAL CASO IL VERSO:

$$\overset{\to 1}{\cos x} \le \frac{\sin x}{x} \le \overset{\to 1}{1}$$

PER IL TEOREMA DEI "CARABINIERI": TESI!!

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ESEMPIO: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{3x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$$= \lim_{x \to 0} \overbrace{\frac{\sin 4x}{4x}}^{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

GENERALIZZAZIONE:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$$

EX. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5}$

TRUCCO: COMPORTAMENTO ASINTOTICO

$x \to 0 \qquad \sin \alpha x = \alpha x$

$f(x) \to 0 \qquad \sin f(x) = f(x)$

EX.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin 3x} - 1}{\ln(1 - \sin 5x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{\ln(1 - 5x)} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{-5x} = -\frac{3}{5}$$

Provaci subito tu....

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{4x} =$

2. $\lim_{x \to 0^+} \frac{3x}{2 \sin x^2} =$

3. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x^2}{\sin^2 3x} =$

4. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 2\sin 3x)}{e^{3\sin x} - 1}$

5. $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{x - \pi}$

6. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2x - \pi}{\cos x} =$

7. $\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x} =$

Secondo limite notevole

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 0$

Dimostrazione

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x} =$$

SI MOLTIPLICA E SI DIVIDE PER $1+\cos x$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{1+\cos x} = 1 \cdot \frac{0}{2} = 0$$

$\frac{\sin x}{x} \to 1$

ANALOGAMENTE SI PUÒ DIMOSTRARE UN TERZO LIMITE NOTEVOLE PIÙ INTERESSANTE:

(3) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ INFATTI...

$1-\cos^2 x = \sin^2 x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{\underbrace{1+\cos x}_{\to 1+1}} = \frac{1}{2}$$

$\frac{\sin^2 x}{x^2} \to 1$

ESEMPI

1) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 2x}{3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 2x}{2x} \cdot \frac{2}{3} = 0$

$\frac{1-\cos 2x}{2x} \to 0$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

E ATTENZIONE !!!

DEVO AVERE IL QUADRATO DI 2X

GENERALIZZAZIONE

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos \alpha x}{\beta x} = 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos \alpha x}{\beta x^2} = \frac{\alpha^2}{\beta} \frac{1}{2}$

ESEMPIO

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{5x^2} = \frac{9}{5} \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$

TRUCCO VELOCE (NON FACILE DA RICORDARE)

$x \to 0 \qquad 1-\cos \alpha x = \frac{1}{2}\alpha^2 x^2$

$f(x) \to 0 \qquad 1-\cos f(x) = \frac{1}{2} f(x)^2$

ESEMPI

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{\sin 5x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1-\cos 4x}{16x^2}\cdot 16\cancel{x^2}}{\dfrac{\sin 5x^2}{5x^2}\cdot 5\cancel{x^2}}$$

$\to \frac{1}{2}$ $\quad$ $\to 1$

SENZA TRUCCO

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{5} = \frac{8}{5}$$

CON IL TRUCCO..

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 4x}{\sin 5x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}16\cancel{x^2}}{5\cancel{x^2}} = \frac{8}{5}$$

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{\underbrace{\cos 2x-1}_{}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(3x)^2}{-\frac{1}{2}(2x)^2} =$$

È L'OPPOSTO

$$= \lim_{x\to 0} \frac{9\cancel{x^2}}{-\frac{1}{\cancel{2}}\overset{2}{\cancel{4}}\cancel{x^2}} = -\frac{9}{2}$$

PIÙ DIFFICILE

3) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-\cos 3x}{\ln(1-\sin^2 4x)} = \left[\frac{1-1}{\ln 1}\right] = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

AL NUMERATORE AGGIUNGO E SOTTRAGGO 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)+(1-\cos 3x)}{\ln(1-(4x)^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x+\frac{1}{2}(3x)^2}{-(4x)^2} = *$$

$\sin 4x = 4x$

$e^{2x}-1 = 2x$

$1-\cos 3x = \frac{1}{2}(3x)^2$

"TRUCCHI VELOCI"

$$* = \lim_{x\to 0} \frac{2x+\frac{9}{2}x^2}{-16x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(2+\frac{9}{2}x)}{-16x^{\cancel{2}}} =$$

$\frac{9}{2}x \to 0$

$$= \frac{2}{0} = \infty$$

4) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{2x \sin 3x} = \left[\frac{\ln 1}{0}\right] = \left[\frac{0}{0}\right] = *$$

LIMITE PARTICOLARE $\ln g(x) = g(x) - 1 \quad (g(x)\to 1)$

$$* = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x \sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}\cancel{x^2}}{2\cancel{x}\cdot 3\cancel{x}} = \frac{-\frac{1}{2}}{6} = -\frac{1}{12}$$

$[\cos x - 1 = -(1-\cos x)]$

Adesso provaci tu....

1. $$\lim_{x \to 0^+} \frac{2x}{1-\cos x} =$$

2. $$\lim_{x \to 0^+} \frac{2x^2}{1-\cos 2x} =$$

3. $$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^3 x}{3x} =$$

4. $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(1-2\sin^2 3x\right)}{1-\cos 3x} =$$

5. $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2\sin x^2} - \cos x}{\ln\left(\cos 2x\right)} =$$

6. $$\lim_{x \to 0} \left(\cos x\right)^{\frac{1}{\sin x}} =$$

7. $$\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{\sin \frac{1}{x^2}}\right)^{1-\cos 2x} =$$

Ultimo limite notevole goniometrico

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1$$

FACILE DA DIMOSTRARE, UTILIZZANDO LA RELAZIONE FONDAMENTALE: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1} = 1$$

GENERALIZZAZIONE

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan \alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$$

TRUCCO: $\tan \alpha x = \alpha x$

ESEMPIO

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\tan 3x} - 1}{\ln(1 + 2\tan 4x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{\ln(1 + 8x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3x}{8x} = \frac{3}{8}$$

E ADESSO PROVACI TU...

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-3\sin x)}{e^{\tan 4x}-1} = -\frac{3}{4}$$

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2\tan^2 x}-\cos 3x}{\ln(1-4\tan 3x^2)} =$$

3) $$\lim_{x\to 0} \left(1+2\tan 3x\right)^{\frac{1}{\sin 4x}} = \to e^{\frac{3}{2}}$$

4) $$\lim_{x\to 0} \left(1-\ln(1+4\tan 3x)\right)^{\frac{e^{\sin x}-1}{1-\cos 2x}}$$

5) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos 4x}}{\ln(1+3\sin 2x^2)} =$$

6) $$\lim_{x\to 0} \left(1-\sin 3x\right)^{\frac{\ln(\cos x)}{x\tan x^2}}$$

UN ESEMPIO PARTICOLARE

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\sin 2x - 4x^2}{1-\cos 2x + 4\tan 3x} = \left[\frac{0-0}{1-1+0}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{6x - 4x^2}{\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{4}^{\,2}x^2 + 12x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(6-4x)}{\cancel{x}(2x+12)} = \frac{6-0}{0+12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

PROVACI TU...

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{5\sin 3x + 1 - \cos 4x}{4x^2 - 2\tan 5x} =$$

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-3\sin x) + 4\tan 2x^2}{e^{3x} - \cos 2x - 3x}$$

3) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 5x - 1 + 2\sin x^2}{\ln(1-\tan^2 x)}$$