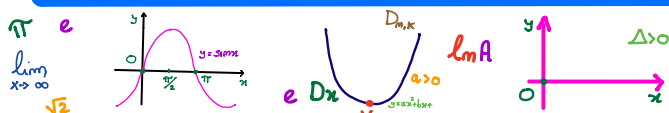
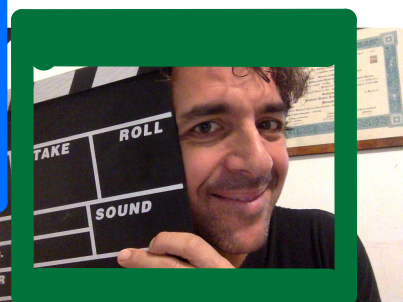


MATEMATICA A COLORI PER TUTTI

INTEGRALI INDEFINITI

STEP 3 PARTE 1

FLIPPED
MATH



WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

UNITA' 3 TERZO STEP

INTEGRALI DI
FUNZIONI COMPOSTE
REGOLE 1-2-3

$$1. \int f(x)^d \cdot \underbrace{f'(x)}_{\uparrow} dx = \frac{f(x)^{d+1}}{d+1} + C$$

$$2. \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

INTEGRALI DI FUNZIONI COMPOSTE 1
DALLE REGOLE DELLE DERIVATE COMPOSTE
(CON CENNI AL METODO DI SOSTITUZIONE)
REGOLA n°1

CONSIDERANDO LA DERIVATA COMPOSTA

$$Df(x)^m = m f(x)^{m-1} \cdot f'(x)$$

$$\Rightarrow \int f(x)^d \cdot \underbrace{f'(x)}_{\uparrow} dx = \frac{f(x)^{d+1}}{d+1} + C$$

LA PRESENZA DI $f'(x)$ È INDISPENSABILE PER
POTER APPLICARE LA REGOLA

ESEMPIO 1

$$\int (x^2 - 3x + 2)^3 \underbrace{(2x - 3)}_{f'(x)} dx =$$
$$f'(x) dx = df(x)$$
$$= \frac{(x^2 - 3x + 2)^4}{4} + C$$

SI POTREBBE PROCEDERE ANCHE COSÌ...

$$\int (x^2 - 3x + 2)^3 d(x^2 - 3x + 2) = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C$$

ESEMPIO 2

$$\int \underbrace{(2x-3)}^4 dx = *$$

$$f(x) = 2x-3 \rightarrow f'(x) = 2$$

$$df(x) = f'(x) dx = 2 dx$$

$$* = \frac{1}{2} \int (2x-3)^4 \overset{\uparrow}{2} dx = \frac{1}{2} \frac{(2x-3)^5}{5} + C$$

SI MOLTIPLICA E SI DIVIDE PER 2

SI POTREBBE PROCEDERE CON IL METODO DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE:

$$\int g(f(x)) \underbrace{f'(x) dx}_{df(x)} = \int g(f(x)) df(x) =$$

$$= \int g(t) dt$$

$$t = f(x)$$

ESEMPIO 3

$$\int \sqrt{3x-2} \, dx = \frac{1}{3} \int (3x-2)^{\frac{1}{2}} 3 \, dx =$$

$$f(x) = 3x-2 \quad df(x) = 3 \, dx$$

$$= \frac{1}{3} \int (3x-2)^{\frac{1}{2}} d(3x-2) =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{(3x-2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{9} \sqrt{(3x-2)^3} + C$$

ESEMPIO 4

$$\int \frac{dx}{(4x-3)^2} = \frac{1}{4} \int (4x-3)^{-2} df(x) =$$

$$f(x) = 4x-3 \rightarrow df(x) = 4 \, dx$$

$$dx = \frac{1}{4} df(x)$$

È UNA COSTANTE E SI PUÒ PORTARE FUORI

$$= \frac{1}{4} \frac{(4x-3)^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{4(4x-3)} + C$$

ESEMPIO 5

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int (\ln x)^2 \frac{1}{x} dx =$$

$f(x) = \ln x \quad df(x) = \frac{1}{x} dx$

$$= \frac{\ln^3 x}{3} + C$$

ESEMPIO 6

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \int (\arctan x)^1 \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$f(x) = \arctan x \quad df(x) = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \arctan^2 x + C$$

ESEMPIO 7

$$\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} dx = *$$

N.B. SE NON CI FOSSE STATA LA x AVREMMO APPLICATO LA REGOLA DELL' ARCSINX

$$* = \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} 3x dx =$$
$$f(x) = 1-x^2 \rightarrow df(x) = -2x dx$$

$$\Rightarrow dx = \frac{1}{-2x} df(x)$$

$$= \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} 3x \frac{1}{-2x} df(x) =$$

$$= -\frac{3}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} df(x) = -\frac{3}{2} \frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C =$$
$$= -3 \sqrt{1-x^2} + C$$

ADESSO PROVACI TU...

$$1) \int (5x^2 + 1)^3 x dx = \frac{(5x^2 + 1)^4}{40} + C$$

$$2) \int \frac{3x dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = 3 \sqrt{x^2 + 1} + C$$

$$3) \int \frac{2}{x \ln^2 x} dx = -\frac{2}{\ln x} + C$$

$$4) \int \frac{2 \arcsin x}{3 \sqrt{1 - x^2}} dx = \frac{1}{3} \arcsin^2 x + C$$

$$5) \int \sin^3 x \cos x dx = \frac{1}{4} \sin^4 x + C$$

$$6) \int e^x \sqrt{e^x + 1} dx = \frac{2}{3} \sqrt{(e^x + 1)^3} + C$$

REGOLA N° 2

$$D \ln f(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

MA POSSIAMO ANCHE SCRIVERLA COSÌ...

$$\int \frac{1}{f(x)} df(x) = \ln |f(x)| + C$$

ESEMPIO 1

$$\int \frac{3}{2x-1} dx = 3 \int \frac{1}{2x-1} \cdot \frac{1}{2} df(x) =$$

$f(x) = 2x-1 \rightarrow df(x) = 2 dx \rightarrow dx = \frac{1}{2} df(x)$

$$= \frac{3}{2} \ln |2x-1| + C$$

ESEMPIO 2 (NOTEVOLE)

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx =$$

$$f(x) = \cos x \quad df(x) = -\sin x \, dx$$

$$= - \int \frac{1}{\cos x} \, df(x) = - \ln |\cos x| + C$$

ANALOGAMENTE

$$\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C$$

ESEMPIO 3

$$\int \frac{2 \sin x}{3 \cos x - 1} \, dx = 2 \left(-\frac{1}{3} \right) \int \frac{1}{3 \cos x - 1} \, df(x) =$$

$$f(x) = 3 \cos x - 1 \quad df(x) = -3 \sin x \, dx$$

$$\sin x \, dx = -\frac{1}{3} \, df(x)$$

$$= -\frac{2}{3} \ln |3 \cos x - 1|$$

ESEMPIO 4

$$\int \frac{2}{x(\ln x - 1)} dx = 2 \int \frac{1}{\ln x - 1} \overbrace{\frac{1}{x} dx}^{df(x)} =$$

$$f(x) = \ln x - 1 \quad df(x) = \frac{1}{x} dx$$

$$= 2 \ln |\ln x - 1| + C$$

PROVACI TU ...

$$1) \int \frac{2x}{1+4x^2} dx = \frac{1}{4} \ln(1+4x^2) + C$$

$$2) \int \frac{\sqrt{2} \cos x}{2 \sin x + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln |2 \sin x + 1| + C$$

$$3) \int \frac{2 dx}{\arctan x (1+x^2)} = 2 \ln |\arctan x| + C$$

$$4) \int \frac{dx}{(2 \ln 3x + 1)x} = \frac{1}{2} \ln |2 \ln 3x + 1| + C$$

INTEGRALI DI FUNZIONI COMPOSTE (ESPOENZIALE)

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x) dx = \int g(f(x)) df(x) = \int g(t) dt$$

REGOLA N°3

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \int e^{f(x)} df(x) = e^{f(x)} + C$$
$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$$

ESEMPI

1. $\int x e^{x^2-1} dx = *$

$$f(x) = x^2 - 1 \rightarrow df(x) = 2x dx \quad dx = \frac{1}{2x} df(x)$$

$$* \int \cancel{x} e^{x^2-1} \frac{1}{\cancel{2x}} df(x) = \frac{1}{2} \int e^{x^2-1} d(x^2-1) =$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2-1} + C$$

$$\text{EX 2} \quad \int \frac{2^{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}} dx = *$$

$$f(x) = \sqrt{x} + 1 \quad df(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \quad dx = 2\sqrt{x} df(x)$$

$$* = \int \frac{2^{\sqrt{x}+1}}{\cancel{\sqrt{x}}} \cancel{2\sqrt{x}} df(x) = 2 \int 2^{\sqrt{x}+1} d(\sqrt{x}+1) =$$

$$= 2 \frac{2^{\sqrt{x}+1}}{\ln 2} + C$$

EX 3

$$\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx = \int e^{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = *$$

$$f(x) = \arctan x \quad df(x) = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$* = e^{\arctan x} + C$$

PROVACI TU...

$$1. \int e^{2x-1} dx = \frac{1}{2} e^{2x-1} + C$$

$$2. \int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

$$3. \int \sin x e^{\cos x} dx = -e^{\cos x} + C$$

$$4. \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = e^{\tan x} + C$$

$$5. \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = -e^{\frac{1}{x}} + C$$