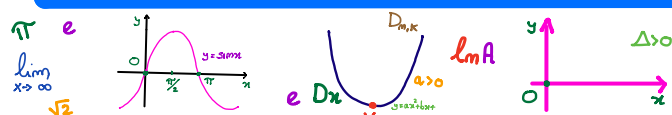


MATEMATICA A COLORI PER TUTTI

INTEGRALI INDEFINITI STEP 3 PARTE 3-4

FLIPPED
MATH



WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

UNITÀ 3 TERZO STEP

INTEGRALI DI FUNZIONI COMPOSTE PARTE 3-4

GONIOMETRICI REGOLE 4-7

SE IMPARATE IL MECCANISMO, SARÀ FACILE
APPLICARLO ANCHE AGLI INTEGRALI GONIOMETRICI

$$4. \int \sin f(x) \cdot f'(x) dx = \int \sin f(x) df(x) = -\cos f(x) + c$$

ES.

$$\int \frac{\sin \ln x}{x} dx = \int \sin \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = -\cos \ln x + c$$

$$f(x) = \ln x \quad df(x) = \frac{1}{x} dx$$

$$5. \int \cos f(x) \cdot f'(x) dx = \int \cos f(x) df(x) = \sin f(x) + c$$

ES.

$$\int 3x \cos(x^2+4) dx = *$$

$$f(x) = x^2 + 4 \quad df(x) = 2x dx \quad dx = \frac{1}{2x} df(x)$$

$$* = 3 \int \cancel{x} \cos(x^2+4) \frac{1}{\cancel{2x}} df(x) =$$

$$= \frac{3}{2} \sin(x^2+4) + c$$

$$6. \int \frac{1}{\cos^2 f(x)} df(x) = \tan f(x) + c$$

$$7. \int \frac{1}{\sin^2 f(x)} df(x) = -\cot f(x) + c$$

ESEMPIO

$$\int \frac{5 dx}{\cos^2 4x} = 5 \int \frac{1}{\cos^2 4x} \left(\frac{1}{4} \right) df(x) = *$$

$$f(x) = 4x \rightarrow df(x) = 4 dx \rightarrow dx = \frac{1}{4} df(x)$$

$$* = \frac{5}{4} \tan 4x + c$$

ESEMPIO 2 RICORDANDO CHE: $\int \cot^2 x + 1 dx = -\cot x + c$

$$\int \cot^2 2x dx = \int \cot^2 2x \left(\frac{1}{2} \right) df(x) = *$$

$$f(x) = 2x \rightarrow df(x) = 2 dx \quad dx = \frac{1}{2} df(x)$$

$$* = \frac{1}{2} \int (\cot^2 2x + 1) d(2x) = *$$

(OCCORRE PRESTARE MOLTA ATTENZIONE AI
SEGNI ALLE PARENTESI E A $d2x$)

$$\begin{aligned} * &= \frac{1}{2} \left[\int (\cot^2 2x + 1) d2x - \int \underbrace{1}_{2 dx} d2x \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[-\cot 2x - 2x \right] + C = -\frac{1}{2} \cot 2x - x + C \end{aligned}$$

PROVACI TU...

$$1. \int x \sin x^2 dx = -\frac{1}{2} \cos x^2 + C$$

$$2. \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \sin \sqrt{x} + C$$

$$3. \int \frac{2 dx}{x \sin^2 \ln x} = -2 \cot \ln x + C$$

$$4. \int \tan^2 4x dx = \frac{1}{4} \tan 4x - x + C$$

INTEGRALI DI FUNZIONI CIRCOLARI INVERSE COMPOSTE

REGOLA 8

$$\int \frac{1}{1+f(x)^2} df(x) = \arctan f(x) + C$$

ESEMPIO 1

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+(x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \arctan x^2 + C$$

$$f(x) = x^2 \rightarrow df(x) = 2x dx$$

ESEMPIO 2

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2} dx = \arctan e^x + C$$

$$f(x) = e^x \quad df(x) = e^x dx$$

ATTENZIONE ALLE "IMITAZIONI"

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx = *$$

IN QUESTO CASO: $f(x) = 1 + e^{2x}$

$$df(x) = e^{2x} \cdot 2 \cdot dx \Rightarrow e^{2x} dx = \frac{1}{2} df(x)$$

$$* = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1 + e^{2x}} d(1 + e^{2x}) = \frac{1}{2} \ln|1 + e^{2x}| + c$$

UN ALTRO ESEMPIO NOTEVOLE

$$\int \frac{1}{a + bx^2} dx = \int \frac{1}{a \left[1 + \left(\sqrt{\frac{b}{a}} x \right)^2 \right]} dx = *$$

SI METTE IN EVIDENZA a

$$a + bx^2 = a \left(1 + \frac{b}{a} x^2 \right) = a \left[1 + \left(\sqrt{\frac{b}{a}} x \right)^2 \right]$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{b}{a}} x \quad df(x) = \sqrt{\frac{b}{a}} dx$$

$$\Rightarrow dx = \sqrt{\frac{a}{b}} df(x)$$

$$* = \int \frac{1}{a \left[1 + \left(\sqrt{\frac{b}{a}} x \right)^2 \right]} \sqrt{\frac{a}{b}} df(x) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{a} \sqrt{\frac{a}{b}}}_{\text{ENTRANDO LA } a: \sqrt{\frac{a}{a^2 b}}} \arctan \sqrt{\frac{b}{a}} x + c = \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan \sqrt{\frac{b}{a}} x + c$$

ESEMPIO

$$\int \frac{dx}{9+16x^2} = \int \frac{1}{9 \left[1 + \left(\frac{4}{3}x \right)^2 \right]} dx = *$$

$$f(x) = \frac{4}{3}x \Rightarrow df(x) = \frac{4}{3}dx \Rightarrow dx = \frac{3}{4}df(x)$$

$$* \quad \cancel{\frac{3}{4}} \frac{1}{\cancel{9}_3} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{4}{3}x \right)^2} df(x) =$$

$$= \frac{1}{12} \arctan \frac{4}{3}x + c$$

ANCHE IN QUESTO CASO, ATTENZIONE ALLE INITIAZIONI!

$$\int \frac{x}{9+16x^2} dx$$

LA x AL NUMERATORE SUGGERISCE UN ALTRO METODO

QUESTA VOLTA $f(x) = 9 + 16x^2 \rightarrow df(x) = 32x dx$

$$\frac{1}{32} \int \frac{32x}{9+16x^2} dx = \frac{1}{32} \ln|9+16x^2| + c$$

PROVACI TU...

$$1. \int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \arctan \ln x + c$$

$$2. \int \frac{x}{16+x^4} dx = \frac{1}{8} \arctan \frac{x^2}{4}$$

$$3. \int \frac{dx}{25+9x^2} = \frac{1}{15} \arctan \frac{3}{5}x + c$$

$$4. \int \frac{x dx}{25+9x^2} = \frac{1}{18} \ln(25+9x^2) + c$$

$$5. \int \frac{x}{81+25x^4} dx = \frac{1}{90} \arctan \frac{5}{9}x^2 + c$$

$$6. \int \frac{x^3}{81+25x^4} dx = \frac{1}{100} \ln(81+25x^4) + c$$

MOLTO SIMILE L'ULTIMA REGOLA

$$\textcircled{9} \int \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} df(x) = \arcsin f(x) + C$$

ESEMPIO

$$1. \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \frac{df(x)}{e^x dx} =$$

$$= \arcsin e^x + C$$

$$2. \int \frac{1}{\sqrt{9-16x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{9\left[1-\left(\frac{4}{3}x\right)^2\right]}} dx =$$

$$f(x) = \frac{4}{3}x \quad df(x) = \frac{4}{3} dx \quad \frac{16}{9}x^2$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{4}{3\sqrt{1-\left(\frac{4}{3}x\right)^2}} dx = \frac{1}{4} \arcsin \frac{4}{3}x + C$$

ATTENZIONE ALLE IMITAZIONI!

$$\int \frac{x}{\sqrt{9-16x^2}} dx = *$$

NON SI PUÒ RIPETERE
IL PROCEDIMENTO DELL'EX
PRECEDENTE PERCHÉ x NON SI PUÒ
PORTARE FUORI

POSSIAMO PERÒ PROVARE UN'ALTRA STRADA

$$* = \int (9-16x^2)^{-\frac{1}{2}} x dx = *$$

$f(x) = 9-16x^2 \quad d(9-16x^2) = -32x dx$

$$x dx = -\frac{1}{32} df(x)$$

$$* = -\frac{1}{32} \int (9-16x^2)^{-\frac{1}{2}} df(x) =$$

$$= -\frac{1}{32} \frac{(9-16x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{1}{16} \sqrt{9-16x^2} + C$$

$$-\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$$

ULTIMO ESEMPIO

$$\int \frac{x}{\sqrt{9-x^4}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{3 \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{3}\right)^2}} dx =$$

$$f(x) = \frac{x^2}{3} \quad df(x) = \frac{2}{3} x dx$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{3} + C$$

ADESSO PROVACI TU...

$$1. \int \frac{dx}{x \sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin \ln x + C$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} = \arcsin \frac{x}{5} + C$$

$$3. \int \frac{x dx}{\sqrt{81-16x^4}} = \frac{1}{4} \arcsin \frac{4}{9} x^2 + C$$