Color est e pluribus unus

corso di Matematica

prof. Claudio Desiderio

Modulo Skinner: **Studio del grafico di una funzione**

Unita' 5: **Funzioni logaritmiche, esponenziali e irrazionali**

Con limiti notevoli

- **Dominio ed Eventuali simmetrie**
- **Intersezioni con gli assi e Studio del segno**
- **Ricerca degli asintoti e Grafico probabile**
- **Grafico di funzioni ottenute tramite particolari trasformazioni, con valori assoluti**

"Non accontentarti di restare nel GRIGIO per paura
del NERO, ma punta dritto al BIANCO..
e tuffati dentro!
Entra nel vortice.. quindi, rallenta:
ritroverai tutti i COLORI
e farai splendere sempre la tua Vita!!"

Studi di funzioni trascendenti

con grafico probabile fino alla ricerca degli asintoti e con simmetrie particolari

1. $f(x) = \dfrac{\ln\left(\frac{x}{4}+1\right)}{\sqrt{e^{x^2/4}-1}}$ CON ASINTOTO ORIZZONTALE

2. $f(x) = \dfrac{\ln\left(\frac{|x|}{4}+1\right)}{\sqrt{e^{x^2/4}-1}}$ $y = f(|x|)$

3. $f(x) = \dfrac{\left|\ln\left(\frac{x}{4}+1\right)\right|}{\sqrt{e^{x^2/4}-1}}$ $y = |f(x)|$

4. $f(x) = \dfrac{\left|\ln\left(\frac{|x|}{4}+1\right)\right|}{\sqrt{e^{x^2/4}-1}}$ $y = |f(|x|)|$

5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-e^{x^2-4}}}{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}$

6. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-e^{x^2-4}}}{\ln\left(1+\frac{|x|}{2}\right)}$

7. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-e^{x^2-4}}}{\left|\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)\right|}$

8. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-e^{x^2-4}}}{\left|\ln\left(1+\frac{|x|}{2}\right)\right|}$

PROVACI TU...

ESEMPIO STUDIO DI FUNZIONE

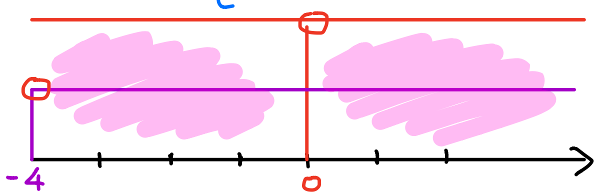
LOGARITMICA ED ESPONENZIALE

1) $f(x)=\dfrac{\ln\left(\frac{x}{4}+1\right)}{\sqrt{e^{x^2/4}-1}}$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{ARGOMENTO} > 0 \\ \text{RADICANDO} \geq 0 \\ \text{DENOMINATORE} \neq 0 \end{array}\right\} > 0$$

1. RICERCA DEL DOMINIO:

C.E. $\begin{cases} \frac{x}{4}+1>0 \Rightarrow x>-4 \\ e^{x^2/4}-1>0 \Rightarrow e^{x^2/4}>e^0 \Rightarrow \frac{x^2}{4}>0 \Rightarrow x^2>0 \Rightarrow x\neq 0 \end{cases}$



$D=\,]-4;0[\,\cup\,]0;+\infty)$

2. EVENTUALI SIMMETRIE: "TRUCCO" → IL DOMINIO NON È SIMMET.

$f(-x)\neq \pm f(x)$ NÈ PARI NÈ DISPARI

3. INTERSEZIONI CON GLI ASSI

$\cap\ \vec{y}\ \begin{cases} x=0 \\ y=f(x) \end{cases}$ $0\notin D$

NESSUNA INTERSEZIONE CON L'ASSE $\vec{y}$

$\nexists\ G_f \cap \vec{y}$

$\dfrac{N(x)}{D(x)}=0 \Longleftrightarrow N(x)=0$

$\cap\ \vec{x}\ \begin{cases} y=0 \\ y=\dfrac{\ln\left(\frac{x}{4}+1\right)}{\sqrt{e^{x^2/4}-1}} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\ln\left(\frac{x}{4}+1\right)}{\sqrt{e^{x^2/4}-1}}=0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{4}+1\right)=0 \Rightarrow \frac{x}{4}+1=1$

$\Rightarrow x=0$ $0\notin D$

NESSUNA INTERSEZIONE CON L'ASSE $\vec{x}$

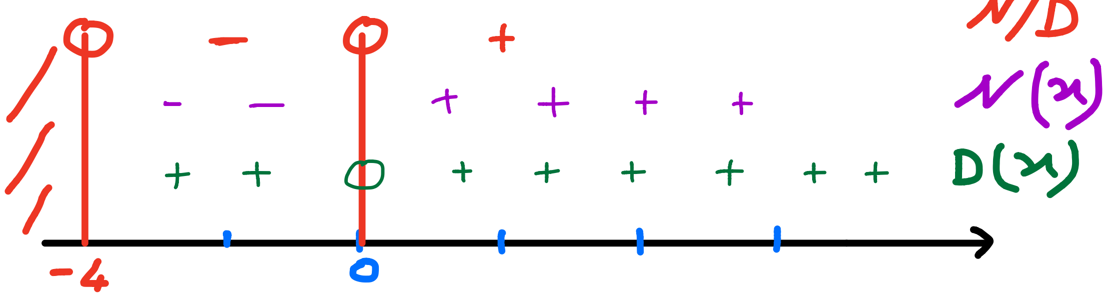
$\ln A(x)=0$
$\Longleftrightarrow A(x)=1$

4. STUDIO DEL SEGNO DELLA FUNZIONE

$f(x) \geq 0$ $\qquad \dfrac{\ln\left(\frac{x}{4}+1\right)}{\sqrt{e^{x^2/4}-1}} \geq 0$ $\qquad \boxed{\ln A(x) > 0 \Rightarrow A(x) > 1}$

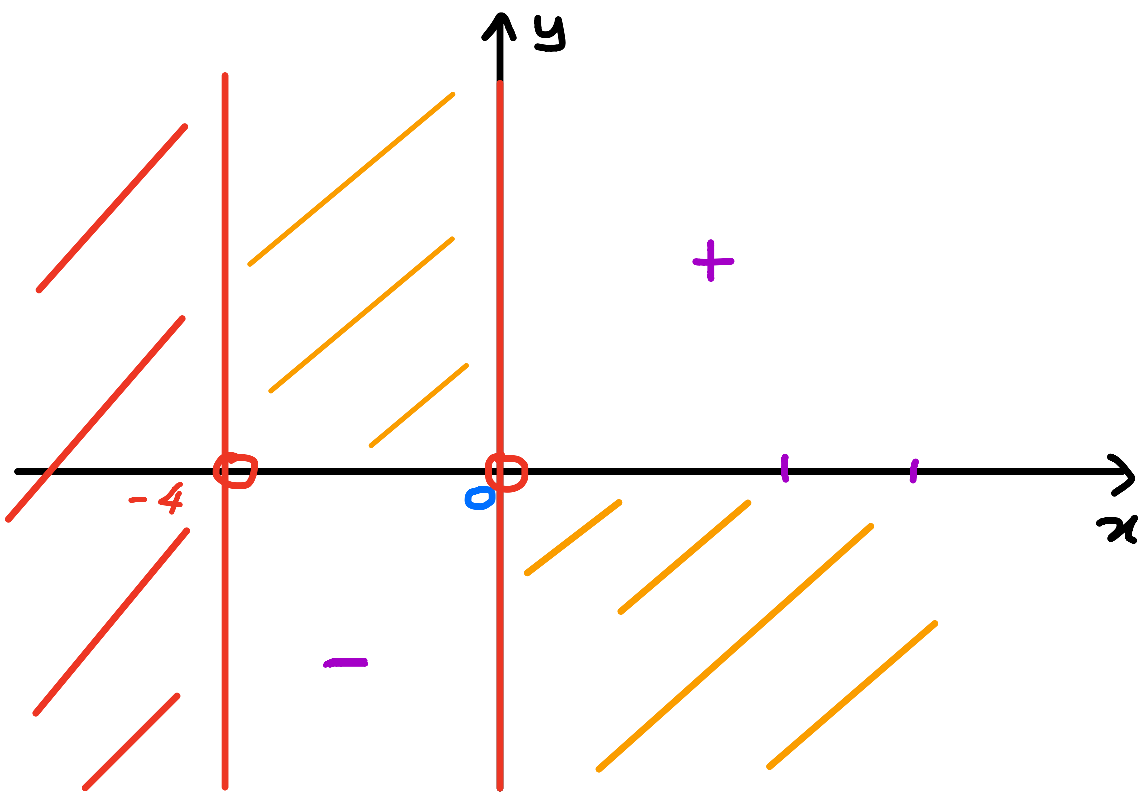
$N(x) \geq 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{4}+1\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{4}+1 > 1 \Rightarrow x > 0$

$D(x) > 0 \Rightarrow \sqrt{e^{x^2/4}-1} > 0 \Rightarrow e^{x^2/4} > e^0 \Rightarrow x \neq 0$



$f(x) \geq 0$ IN $]0; +\infty)$

5. PRIMO APPROCCIO AL GRAFICO:



6. RICERCA DEGLI ASINTOTI ATTRAVERSO I LIMITI AGLI ESTREMI DEL C.E.

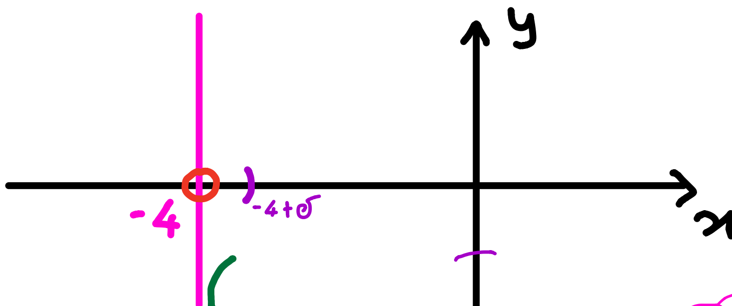
$$f(x)=\frac{\ln\left(\frac{x}{4}+1\right)}{\sqrt{e^{x^2/4}-1}} \qquad D=\left]-4;0\right[\cup\left]0;+\infty\right)$$

SE RICORDIAMO LO STUDIO DEL DOMINIO FATTO ALL'INIZIO DELL'ESERCIZIO, SAPPIAMO GIÀ CHE -4 ANNULLA L'ARGOMENTO DEL LOGARITMO

1. $$\lim_{x\to -4^+}\frac{\ln\left(\frac{x}{4}+1\right)}{\sqrt{e^{x^2/4}-1}}=\left[\frac{\ln 0^+}{+m}\right]=\left[\frac{-\infty}{+m}\right]=-\infty$$

POSSIAMO EVITARE DI SOSTITUIRE SE RICORDIAMO CHE IL DENOMINATORE ESISTE PER $x\neq 0$
.. E SAPPIAMO CHE UNA RADICE È NON NEGATIVA

ASINTOTO VERTICALE DESTRO $x=-4$



ADESSO ATTENZIONE...

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x}{4}+1\right)}{\sqrt{e^{x^2/4}-1}}=\left[\frac{\ln 1}{\sqrt{1-1}}\right]=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

INIZIALMENTE POSSIAMO EVITARE DI DISTINGUERE 0^+ E 0^-

LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{x}{4}\right)}{\frac{x}{4}}}_{\to 1}\cdot\frac{x}{4}}{\sqrt{\underbrace{\frac{e^{x^2/4}-1}{x^2/4}}_{\to 1}\cdot\frac{x^2}{4}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{4}}{\sqrt{\frac{x^2}{4}}}=\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{x}{4}}{+\frac{x}{2}}=+\dfrac{1}{2}\\[2ex]\lim_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{x}{4}}{-\frac{x}{2}}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

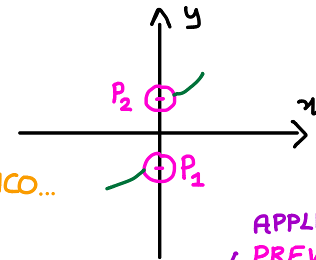
DISCONTINUITÀ DI PRIMA SPECIE

ATTENZIONE: $\sqrt{x^2}=|x|$

ABBIAMO TROVATO 2 PUNTI DI DISCONTINUITÀ: $P_1\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ A SINISTRA, E $P_2\left(0;+\frac{1}{2}\right)$ A DESTRA

GRAFICAMENTE...

PER ECCESSO E PER DIFETTO SI INTUIRÀ DAL GRAFICO...



SALTO DI DISCONTINUITÀ

$$S = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

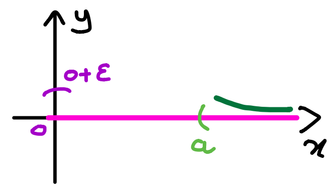
INFINE...

APPLICANDO LA SCALA DEGLI INFINITI PREVALE L'INFINITO ESPONENZIALE AL DENOMINATORE

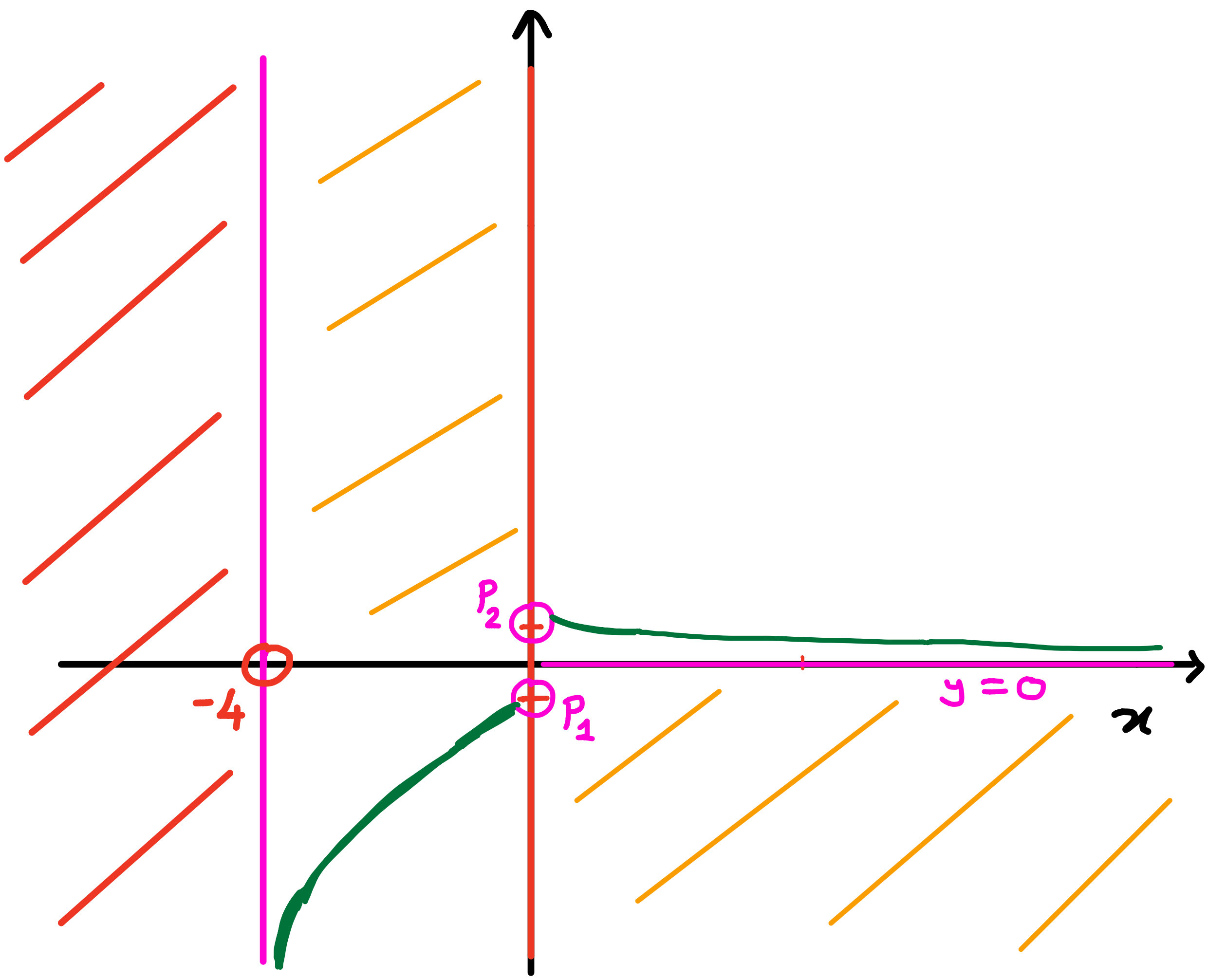
$$3. \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{x}{4}+1\right)}{\sqrt{e^{x^2/4}-1}} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = 0^+$$

$$\left[\frac{m}{\infty} = 0\right]$$

ASINTOTO ORIZZONTALE $y = 0$



7. GRAFICO PROBABILE



2. $f(x)=\dfrac{\ln\left(\frac{|x|}{4}+1\right)}{\sqrt{e^{x^2/4}-1}}$ $\quad y=f(|x|)$

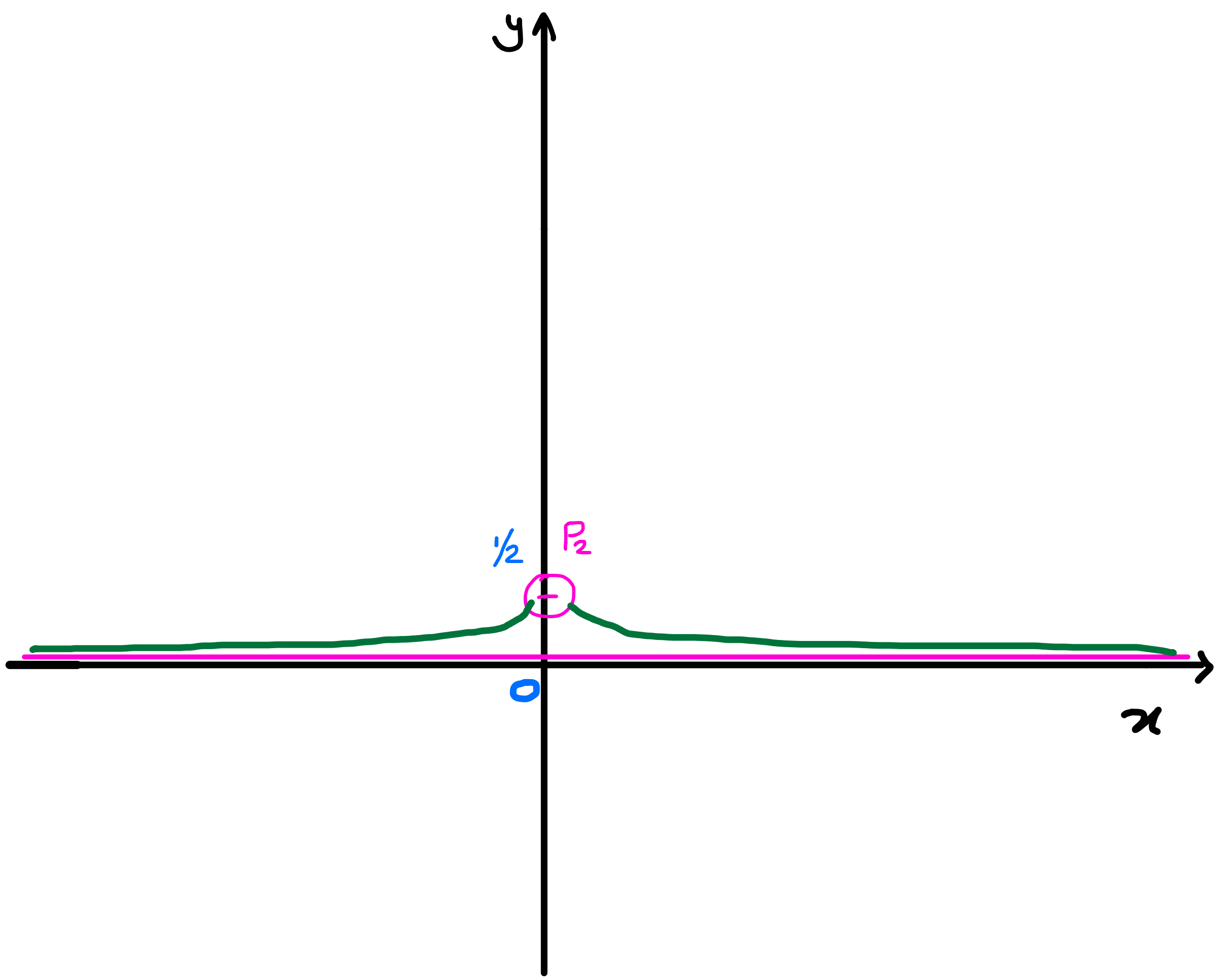
SIMMETRIA PARI (ESSENDO $|-x|=|x|$)

BASTERÀ STUDIARE LA FUNZIONE PER

$x \geq 0 \Rightarrow \quad y=\dfrac{\ln\left(\frac{x}{4}+1\right)}{\sqrt{e^{x^2/4}-1}}$ E QUINDI CONSIDERARE

IL GRAFICO SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE y (PER $x<0$)

GRAFICO PROBABILE



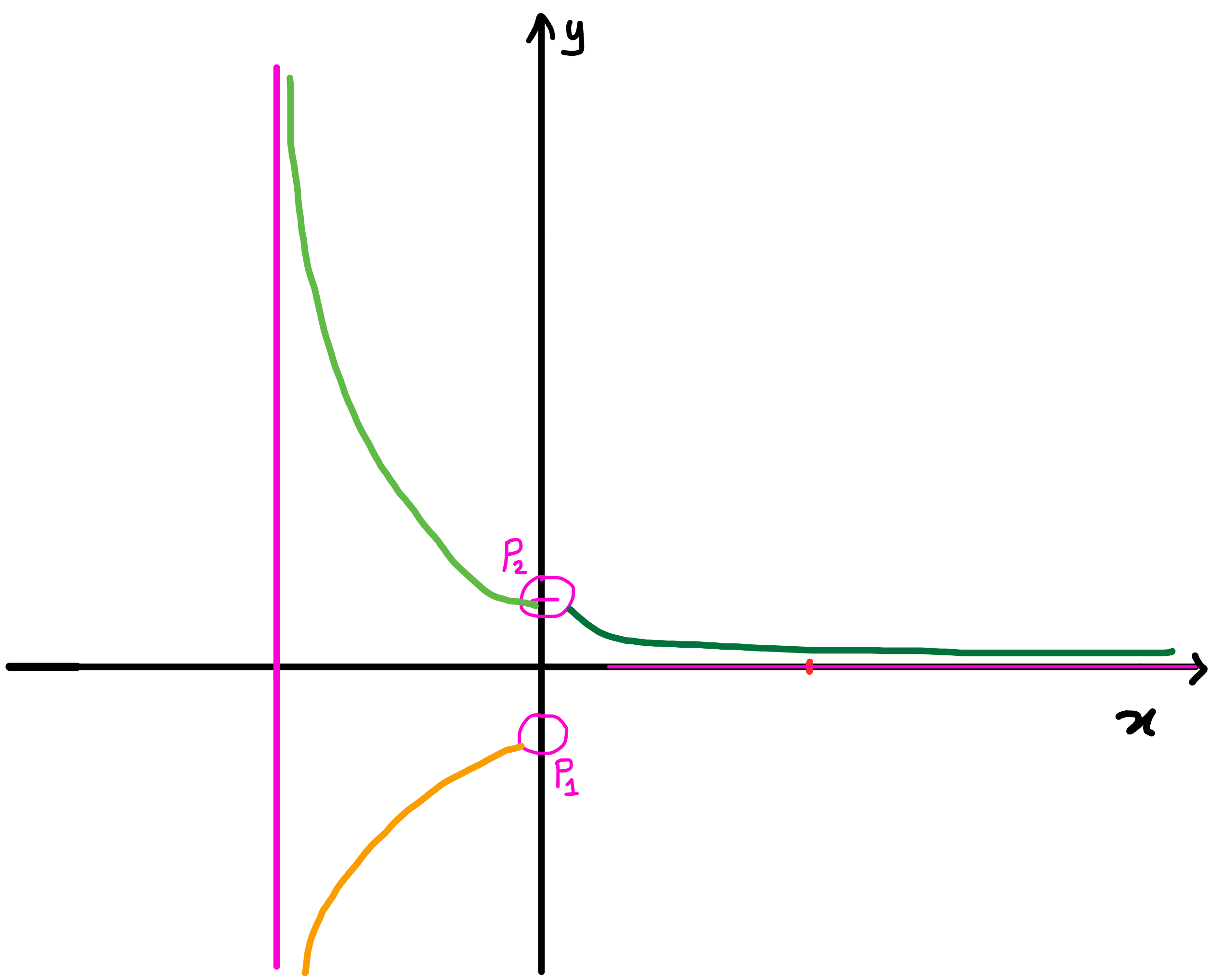
3. $f(x) = \dfrac{\left|\ln\left(\frac{x}{4}+1\right)\right|}{\sqrt{e^{x/4}-1}}$

$y = |f(x)|$

BASTERÀ RAPRESENTARE IL GRAFICO DELLA FUNZIONE $y = \dfrac{\ln\left(\frac{x}{4}+1\right)}{\sqrt{e^{x/4}-1}}$

E "RIBALTARE" RISPETTO ALL'ASSE x LA PARTE NEGATIVA

. GRAFICO PROBABILE



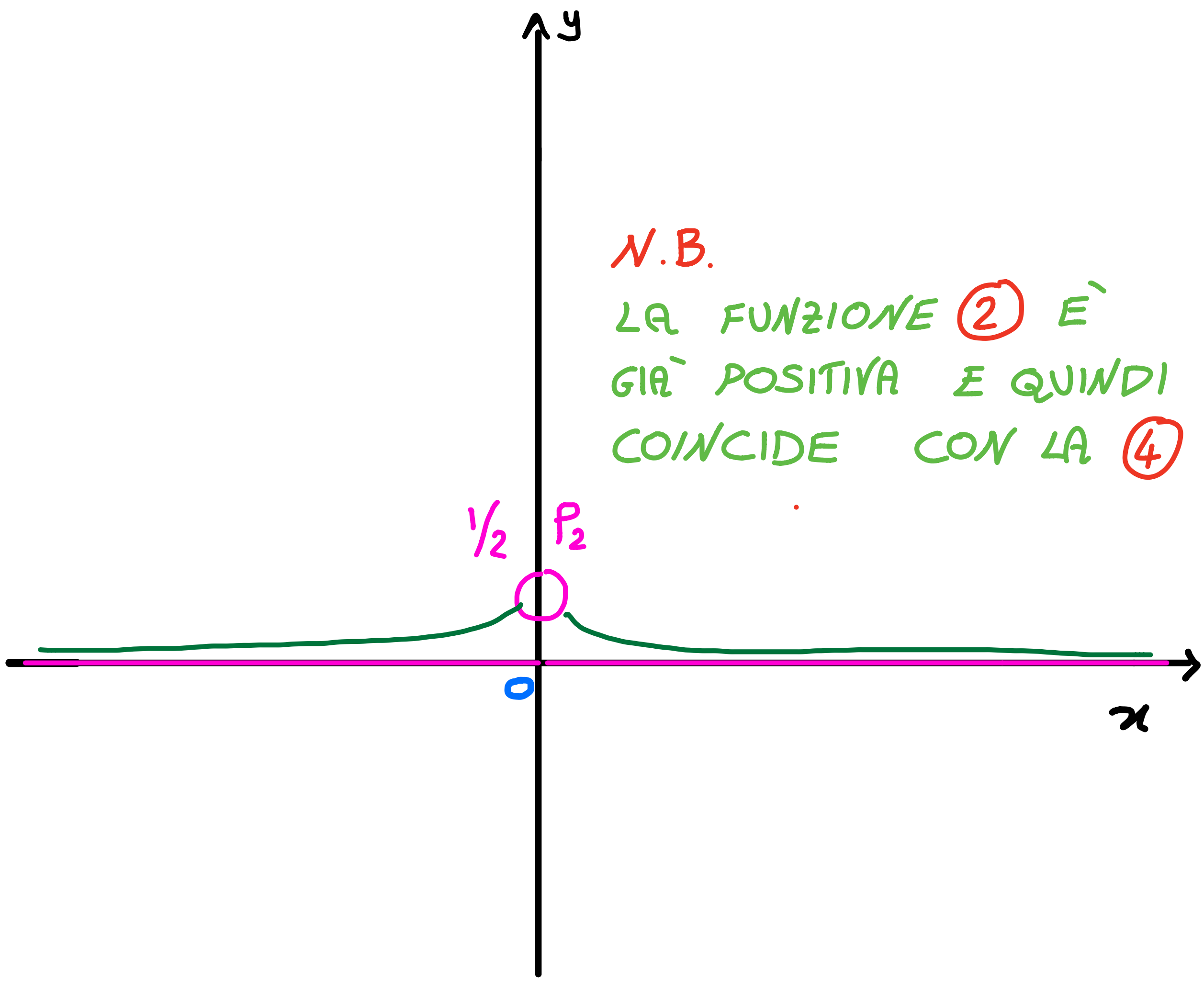
4. $f(x)=\dfrac{\left|\ln\left(\frac{|x|}{4}+1\right)\right|}{\sqrt{e^{x^2/4}-1}}$ $\qquad y=\left|f(|x|)\right|$

SI PARTE DAL GRAFICO DELLA FUNZIONE:

$y=\dfrac{\ln\left(\frac{|x|}{4}+1\right)}{\sqrt{e^{x^2/4}-1}}$ (2)

E SI "TRASFORMA" IN POSITIVO LA PARTE NEGATIVA

GRAFICO PROBABILE



N.B.
LA FUNZIONE (2) È GIÀ POSITIVA E QUINDI COINCIDE CON LA (4)