

MATEMATICA A COLORI PER TUTTI

INTEGRALI INDEFINITI

STEP 4 PARTE 1

FLIPPED
MATH



π e $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}$ $y = \sin x$ $D_{n,k}$ $\ln A$ $\Delta > 0$

WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

UNITA' 5 TERZO STEP

INTEGRALI DI
FUNZIONI RAZIONALI
FRATTE

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$$

CASISTICA

PRIMO CASO: $D(x)$ 1° GRADO $\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$

A) $N(x)$ GRADO ZERO (< 1) ESEMPIO $\int \frac{3}{2x-4} dx$

B) GRADO $N(x) \geq 1$ (GRADO $N(x) \geq$ GRADO $D(x)$) $\int \frac{x^2-3x+4}{x-1} dx$

2° CASO: $D(x)$ 2° GRADO ax^2+bx+c

A) $\Delta > 0$

METODO DELLE COSTANTI

$$\int \frac{x^2+5x+4}{x^2-5x+6} dx$$

B) $\Delta = 0$

METODO MISTO

$$\int \frac{3x-2}{4x^2-4x+1} dx$$

C) $\Delta < 0$

FORMULA DI RIFERIMENTO

$$\int \frac{1}{1+f(x)^2} df(x) = \arctan f(x) + c$$

$$\int \frac{1}{3x^2-2x+1} dx$$

3° CASO: GENERALIZZAZIONI

INTEGRALI DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$$

PRIMO CASO: $D(x)$ 1° GRADO

A) $N(x)$ GRADO ZERO (< 1)

FACILE!! SI RISOLVE CON METODI GIÀ VISTI

EX. $\int \frac{3}{2x-4} dx = 3 \int \frac{1}{2x-4} \cdot \frac{1}{2} df(x) =$

$$f(x) = 2x-4 \rightarrow f'(x) = 2 dx \quad dx = \frac{1}{2} df(x)$$

$$= \frac{3}{2} \ln |2x-4| + c$$

B) GRADO $N(x) \geq 1$ ($\text{GRADO } N(x) \geq \text{GRADO } D(x)$)

SI PROCEDE CON LA DIVISIONE
TRA POLINOMI:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

GRADO $R(x) < \text{GRADO } D(x)$

$$\begin{array}{r|l} N(x) & D(x) \\ \hline & Q(x) \\ & \text{QUOZIENTE} \\ R(x) & \\ \text{RESTO} & \end{array}$$

ESEMPIO $\int \frac{x^2-3x+4}{x-1} dx = *$

APPLICANDO LA
REGOLA:

$$\frac{N}{D} = Q + \frac{R}{D}$$

$$* = \int x-2 + \frac{2}{x-1} dx =$$

$$\begin{array}{r} \overbrace{x^2-3x+4}^{x^2-3x+4} \quad \overbrace{x-1}^{x-1} \\ \underline{x^2-x} \quad \underline{x-2} \\ -2x+4 \quad Q \\ \underline{-2x+2} \\ 2 \end{array}$$

$$= \int x dx - 2 \int 1 dx + 2 \int \frac{1}{x-1} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + 2 \ln|x-1| + C$$

PROVACI SUBITO TU...

1. $\int \frac{2x-3}{3x-1} dx$

2. $\int \frac{x^2-5x+6}{x+4} dx$

2° CASO: $D(x)$ 2° GRADO ax^2+bx+c

SI SCOMPONE IL DENOMINATORE *

E SI PROCEDE CON IL METODO DELLE COSTANTI
(*) SE SI PUO' SCOMPORRE

SCOMPOSIZIONI NOTEVOLI

1) $c=0$ $ax^2+bx = x(ax+b)$

2) $b=0$ $ax^2+c = ?$

• SE a E c HANNO SEGNO DISCORDE
SI PUO' SCOMPORRE TRAMITE LA DIFFERENZA
DI QUADRATI $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

ES. 1. $x^2-9 = (x-3)(x+3)$

ES 2. $x^2-3 = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

• MA SE a E c HANNO SEGNO
CONCORDE, IL POLINOMIO NON SI
PUO' SCOMPORRE E SI PROCEDE CON UN
METODO GIA' VISTO: $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$

3) COMPLETA ax^2+bx+c $b \neq 0$ $c \neq 0$

SI TROVA IL $\Delta = b^2 - 4ac$

E SI DISTINGUONO 3 CASI

A) $\Delta > 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

B) $\Delta = 0$ $x_1 = x_2$

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$$

MA SI POTREBBE RICONOSCERE SUBITO
IL QUADRATO DI BINOMIO

C) $\Delta < 0$ TRINOMIO IRRIDUCIBILE

SI PUÒ PORTARE NELLA FORMA

$$ax^2+bx+c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

E RISOLVERLO TRAMITE *arctangente*

ESEMPI METODO DELLE COSTANTI

$$1. \int \frac{3}{2x^2 - x} dx = 3 \int \frac{1}{x(2x-1)} dx = *$$

SI INTRODUCONO 2 COSTANTI A E B
IN MODO DA SCOMPORRE LA FRAZIONE
IN SOMMA DI 2 FRAZIONI PIU' SEMPLICI

$$* = 3 \int \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} dx =$$

(A E B SI TROVERANNO ALLA FINE)

$$= 3 \left[A \int \frac{1}{x} dx + B \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x-1} dx \right] =$$

$$* \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b|$$

$$f(x) = ax+b \rightarrow df(x) = a dx$$

$$= 3 \left[A \ln|x| + \frac{B}{2} \ln|2x-1| + C \right] = **$$

SI TROVANO A E B RITORNANDO INDIETRO

$$\begin{aligned}\frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} &= \frac{2Ax - A + Bx}{x(2x-1)} = \\ &= \frac{(2A+B)x - A}{x(2x-1)} = \frac{0x + 1}{2x^2 - x}\end{aligned}$$

SI IMPONE CHE:

$$\begin{cases} 2A+B=0 \\ -A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-2A \rightarrow B=2 \\ A=-1 \end{cases}$$

E SI SOSTITUISCE NELLA SOLUZIONE **

$$** = 3 \left[-1 \ln|x| + \frac{2}{2} \ln|2x-1| + C \right] =$$

$$= -3 \ln|x| + 3 \ln|2x-1| + C$$

N.B. SE GRADO $N(x) \geq$ GRADO $D(x)$
OCCORRE PRIMA EFFETTUARE LA
DIVISIONE TRA POLINOMI

ESEMPIO 2 (DIFFERENZA DI QUADRATI)

$$\int \frac{2x-3}{x^2-4} dx = \int \frac{2x-3}{(x-2)(x+2)} dx =$$

$$x^2-4 = (x-2)(x+2)$$

$$= \int \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} dx = A \ln|x-2| + B \ln|x+2| + C$$

(*)

TROVIAMO A PARTE A E B

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{Ax+2A+Bx-2B}{(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{(A+B)x+2A-2B}{x^2-4} = \frac{2x-3}{x^2-4}$$

E SI TROVANO A E B RISOLVENDO IL SISTEMA

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 2A-2B=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} A=2-B \\ 4-2B-2B=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} * \\ 4B=7 \end{cases} \quad \begin{cases} A=2-\frac{7}{4} \Rightarrow A=\frac{1}{4} \\ B=7/4 \end{cases}$$

RITORNANDO AL NOSTRO INTEGRALE

$$\int \frac{2x-3}{x^2-4} dx = \dots = A \ln|x-2| + B \ln|x+2|$$

$$+ C = \frac{1}{4} \ln|x-2| + \frac{7}{4} \ln|x+2| + C$$

ESEMPIO 3 ($\Delta > 0$)

$$\int \frac{x^2+5x+4}{x^2-5x+6} dx \quad \text{GRADO } N(x) = \text{GRADO } D(x) \\ (*)$$

PRIMA OCCORRE FARE LA DIVISIONE TRA I POLINOMI

$$\begin{array}{r|l} x^2+5x+4 & x^2-5x+6 \\ \hline - & \\ - & \\ - & \\ \hline x^2-5x+6 & 1 \\ \hline = 10x-2 & \end{array}$$

LA FRAZIONE PUÒ ESSERE COSÌ SCOMPOSTA:

$$\frac{x^2+5x+4}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{10x-2}{x^2-5x+6}$$

$$\begin{aligned}
 (*) &= \int 1 + \frac{10x-2}{x^2-5x+6} dx = \\
 &= x + \int \frac{10x-2}{x^2-5x+6} dx \quad **
 \end{aligned}$$

RISOLVIAMO L'INTEGRALE SCOMPONENDO IL DENOMINATORE

CON IL TRINOMIO NOTEVOLLE:

$$x^2 + (a+b)x + a \cdot b = (x+a)(x+b)$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

$$\text{INFATTI: } -2-3 = -5 \quad (-2) \cdot (-3) = 6$$

OPPURE CON LA FORMULA GENERALE

$$\text{CASO } \Delta > 0 : ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{array} \right\} \quad \downarrow \quad 1(x-2)(x-3)$$

POSSIAMO ADESSO RISOLVERE L'INTEGRALE

$$\int \frac{10x-2}{x^2-5x+6} dx = \int \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} dx =$$

$$= A \ln|x-2| + B \ln|x-3| + C = **$$

TROVIAMO A PARTE I VALORI DI A E B

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{(A+B)x - 3A - 2B}{x^2 - 5x + 6} = \frac{10x - 2}{x^2 - 5x + 6}$$

E RISOLVIAMO IL SISTEMA

$$\begin{cases} A+B=10 \\ -3A-2B=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} A=10-B \\ -30+3B-2B=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=10-28 \\ B=28 \end{cases} \quad A=-18$$

INFINE

$$** = -18 \ln|x-2| + 28 \ln|x-3| + C$$

ESEMPIO 4 ($\Delta=0$)

$$\int \frac{3x-2}{4x^2-4x+1} dx \quad \Delta=0$$

QUADRATO DI BINOMIO

$$4x^2-4x+1 = (2x-1)^2$$

IN TAL CASO, ATTENZIONE A COME SI
SCOMPONE LA FRAZIONE

$$\int \frac{3x-2}{(2x-1)^2} dx = \int \frac{A}{(2x-1)^2} + \frac{B}{2x-1} dx =$$

$$= \frac{A}{2} \int \underbrace{(2x-1)^{-2}}_{\text{}} \underbrace{2 dx}_{\text{}} + \frac{B}{2} \int \underbrace{\frac{1}{2x-1}}_{\text{}} \underbrace{2 dx}_{\text{}} =$$

$$f(x) = 2x-1 \rightarrow df(x) = \underline{2 dx}$$

$$= \frac{A}{2} \frac{(2x-1)^{-1}}{-1} + \frac{B}{2} \ln|2x-1| + C =$$

$$= -\frac{A}{2(2x-1)} + \frac{B}{2} \ln|2x-1| + C = (*)$$

ADESSO DOBBIAMO TROVARE A E B

$$\begin{aligned}\frac{A}{(2x-1)^2} + \frac{B}{2x-1} &= \frac{A+2Bx-B}{(2x-1)^2} = \\ &= \frac{2Bx + A-B}{4x^2-4x+1} = \frac{3x-2}{4x^2-4x+1}\end{aligned}$$

RISOLVIAMO IL SISTEMA

$$\begin{cases} 2B = 3 \\ A-B = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} B = \frac{3}{2} \\ * \end{cases} \quad A = -2 + \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} * \\ A = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

RITORNANDO AL NOSTRO INTEGRALE

$$(*) = -\frac{A}{2(2x-1)} + \frac{B}{2} \ln|2x-1| + C =$$

$$= -\frac{-\frac{1}{2}}{2(2x-1)} + \frac{\frac{3}{2}}{2} \ln|2x-1| + C =$$

$$= +\frac{1}{4(2x-1)} + \frac{3}{4} \ln|2x-1| + C$$

ESEMPIO 5 (PIU' SEMPLICE)

$$\int \frac{2}{9x^2 - 6x + 1} dx = \Delta = 0 \quad \text{QUADRATO DI BINOMIO}$$

$$= 2 \int \frac{1}{(3x-1)^2} dx = 2 \int (3x-1)^{-2} dx = *$$

$$f(x) = 3x-1 \quad df(x) = 3 dx \quad dx = \frac{1}{3} df(x)$$

$$* = 2 \int (3x-1)^{-2} \frac{1}{3} d(3x-1) =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{(3x-1)^{-1}}{-1} + C = -\frac{2}{3(3x-1)} + C$$

ABBIAMO UTILIZZATO LA REGOLA

$$\int f(x)^d df(x) = \frac{f(x)^{d+1}}{d+1} + C$$

ESEMPIO 5 ($\Delta < 0$)

$$\int \frac{1}{3x^2 - 2x + 1} dx \quad \Delta = 4 - 12 = -8 < 0$$

SCOMPONIAMO IL TRINOMIO TRAMITE
LA FORMULA:

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

$$3x^2 - 2x + 1 = 3 \left[\left(x - \frac{2}{6} \right)^2 + \frac{8}{36} \right] = *$$

IL NOSTRO OBIETTIVO E' OTTENERE

$$\int \frac{1}{1 + f(x)^2} df(x) = \arctan f(x) + c$$

$$\begin{aligned} * &= 3 \left[\frac{2}{9} + \left(\frac{3x-1}{3} \right)^2 \right] = \\ &= \cancel{3} \frac{2}{\cancel{9}_3} \left[\cancel{1} + \left(\frac{3x-1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] = \frac{2}{3} \left[1 + \left(\frac{3x-1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$(\sqrt{2})^2 = 2$

RITORNIAMO AL NOSTRO INTEGRALE

$$\int \frac{1}{3x^2 - 2x + 1} dx = \int \frac{1}{\frac{2}{3} \left[1 + \left(\frac{3x-1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right]} dx = *$$

$$f(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow df(x) = \frac{3}{\sqrt{2}} dx$$

$$dx = \frac{\sqrt{2}}{3} df(x)$$

$$* = \frac{3}{2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{3x-1}{\sqrt{2}} \right)^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right) df(x) =$$

$$= \frac{\cancel{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{\cancel{3}} \arctan \frac{3x-1}{\sqrt{2}} + c =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{3x-1}{\sqrt{2}} + c$$

ESEMPIO 6 ($\Delta < 0$) IMPEGNATIVO!!

$$\int \frac{x+2}{x^2-2x+2} dx \quad \Delta = 4 - 8 = -4 < 0$$

PRIMA DOBBIAMO FARE IN MODO DI
AVERE AL NUMERATORE LA DERIVATA
DEL DENOMINATORE (A CAUSA DELLA
PRESENZA DI $x+2$)

PER RICONDURCI AD UN INTEGRALE DEL
TIPO:

$$\int \frac{1}{f(x)} df(x) = \ln|f(x)| + c$$

RISCRIVENDO IL NOSTRO INTEGRALE

$$\int \frac{x+2}{x^2-2x+2} dx = * \quad df(x) = (2x-2) dx$$

PER OTTENERE $2x-2$ DOBBIAMO
MOLTIPLICARE E DIVIDERE PER 2

$$* = \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2-2x+2} dx = * *$$

ADESSO DOBBIAMO SOTTRARRE E AGGIUNGERE 2

$$** = \frac{1}{2} \int \frac{(2x - 2) + \sqrt{2+4}}{x^2 - 2x + 2} dx =$$

SEPARANDO I 2 INTEGR.

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2}{x^2-2x+2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 2) + 3 \int \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx = **$$

$\Delta < 0$ TRINOMIO SEMPRE POSITIVO

ADESSO POSSIAMO OCCUPARCI DEL TRINOMIO

$x^2 - 2x + 2$ CON $\Delta < 0$

GUARDATE COME POSSIAMO SCOMPORLO:

$$x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1$$

QUINDI : DARÀ LUOGO ALL' ARCTANGENTE

$$** = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 2) + 3 \arctan(x-1) + C$$

ADESSO PROVACI TU...

$$1. \int \frac{1}{16x^2-9} dx = -\frac{1}{24} \ln \left| \frac{4x+3}{4x-3} \right| + C$$

$$2. \int \frac{1}{2x^2-5x-3} dx = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{2x+1}{x-3} \right| + C$$

$$3. \int \frac{4x+7}{x^2+3x+2} dx = \ln|x+2| + 3 \ln|x+1| + C$$

$$4. \int \frac{1}{9x^2+12x+4} dx = -\frac{1}{3(3x+2)} + C$$

$$5. \int \frac{7x+1}{x^2+10x+25} dx = 7 \ln|x+5| + \frac{34}{x+5} + C$$

$$6. \int \frac{4}{4x^2+x+5} dx = \frac{8}{\sqrt{79}} \arctan \frac{8x+1}{\sqrt{79}} + C$$

$$7. \int \frac{2x-1}{x^2+6x+10} dx = \ln(x^2+6x+10) - 2 \arctan(x+3) + C$$

$$8. \int \frac{x^2-6x+4}{x^2+2x+4} dx = x - 4 \ln(x^2+2x+4) + \frac{8}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$$

