Color est e pluribus unus

corso di Matematica

prof. Claudio Desiderio

Modulo Skinner: **Studio del grafico di una funzione**

Unita' 6: **Funzioni goniometriche**

- **Dominio, periodicità ed Eventuali simmetrie**
- **Intersezioni con gli assi e Studio del segno**
- **Ricerca degli asintoti e Grafico probabile**
- **Grafico di funzioni ottenute tramite particolari trasformazioni, con valori assoluti**

"Non accontentarti di restare nel GRIGIO per paura
del NERO, ma punta dritto al BIANCO..
e tuffati dentro!
Entra nel vortice.. quindi, rallenta:
ritroverai tutti i COLORI
e farai splendere sempre la tua Vita!!"

Studi di funzioni goniometriche

con grafico probabile fino alla ricerca degli asintoti e

con simmetrie particolari

1. $f(x) = \dfrac{2\cos^2 x - 1}{1 - 2\sin x}$

2. $f(x) = \dfrac{2\cos^2 x - 1}{1 - 2\sin|x|}$ $\qquad y = f(|x|)$

3. $f(x) = \left|\dfrac{2\cos^2 x - 1}{1 - 2\sin x}\right|$ $\qquad y = |f(x)|$

4. $f(x) = \left|\dfrac{2\cos^2 x - 1}{1 - 2\sin|x|}\right|$ $\qquad y = |f(|x|)|$

5. $f(x) = \dfrac{2\sin^2 x + \sin x}{\sqrt{3} - 2\cos x}$

6. $f(x) = \dfrac{2\sin^2 x + \sin|x|}{\sqrt{3} - 2\cos x}$

7. $f(x) = \left|\dfrac{2\sin^2 x + \sin x}{\sqrt{3} - 2\cos x}\right|$

8. $f(x) = \left|\dfrac{2\sin^2 x + \sin|x|}{\sqrt{3} - 2\cos x}\right|$

PROVACI TU...

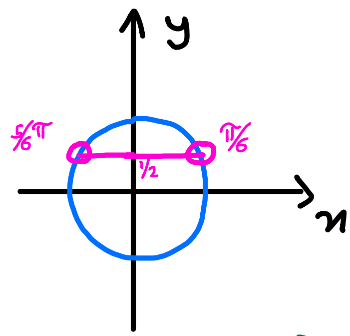
ESEMPIO STUDIO DI FUNZIONE

GONIOMETRICA

1) $f(x)=\dfrac{2\cos^2 x-1}{1-2\sin x}$

1. RICERCA DEL DOMINIO: $D\neq 0$ $\qquad 2\sin x-1\neq 0$

$\sin x\neq \frac{1}{2} \Rightarrow x\neq \frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x\neq \frac{5\pi}{6}+2k\pi$



2. PERIODICITÀ: $T=2\pi$

PERTANTO POSSIAMO LIMITARE LO STUDIO DELLA FUNZIONE NELL'INTERVALLO $[0;2\pi]$

$\Rightarrow D=[0;\pi/6[\cup]\pi/6;\,5/6\pi[\cup]5/6\pi;\,2\pi]$

3. EVENTUALI SIMMETRIE: $\sin x$ È DISPARI; $\cos x$ È PARI

$f(-x)\neq \pm f(x)$ NÈ PARI NÈ DISPARI

4. INTERSEZIONI CON GLI ASSI

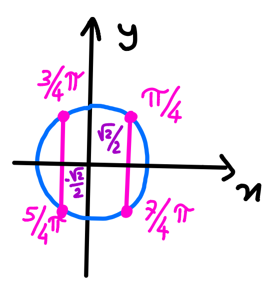
$\cap\vec{y}\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{2\cos^2 x-1}{1-2\sin x}\end{cases} \Rightarrow y=\dfrac{2\overbrace{\cos^2 0}^{1}-1}{1-2\underbrace{\sin 0}_{0}}=\dfrac{2-1}{1-0}=1$

$A(0;1)$ E SFRUTTANDO LA PERIODICITÀ: $A'(2\pi;1)$

$\dfrac{N(x)}{D(x)}=0 \Leftrightarrow N(x)=0$

$\cap\vec{x}\begin{cases} y=0 \\ y=\dfrac{2\cos^2 x-1}{1-2\sin x}\end{cases} \Rightarrow 2\cos^2 x-1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad B(\pi/4;0)\ C(3/4\pi;0)\ D(5/4\pi;0)\ E(7/4\pi;0)$

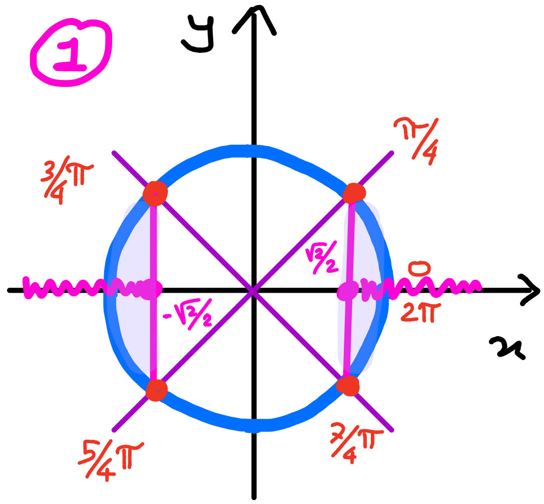


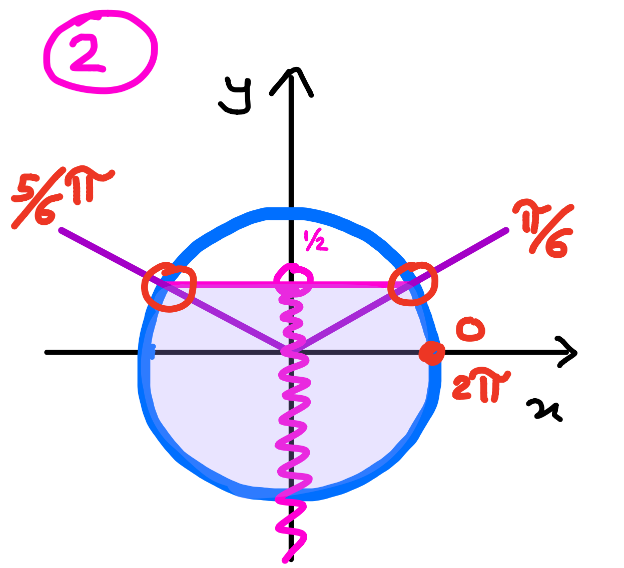
4. STUDIO DEL SEGNO DELLA FUNZIONE

$f(x) \geq 0 \qquad \dfrac{2\cos^2 x - 1}{1 - 2\sin x} \geq 0$

$N(x) \geq 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 \geq 0 \Rightarrow \cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee \cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ (1)

$D(x) > 0 \Rightarrow 1 - 2\sin x > 0 \Rightarrow \sin x < \frac{1}{2}$ (2)



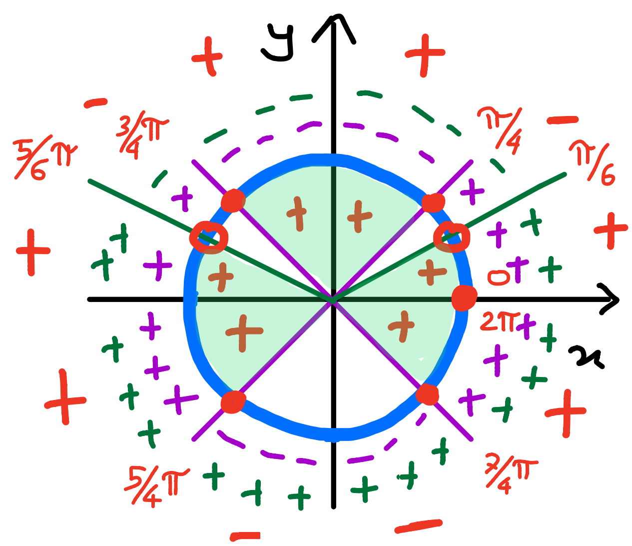


$N \geq 0 \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \vee \frac{3}{4}\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi \vee \frac{7}{4}\pi \leq x \leq 2\pi$

$D > 0 \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \vee \frac{5}{6}\pi < x \leq 2\pi$

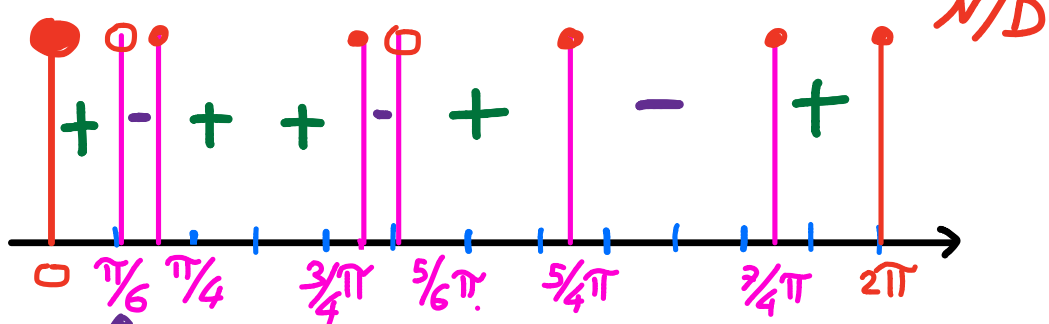
GRAFICO DEI SEGNI

$f(x) \geq 0$ IN



$f(x) \geq 0$ IN

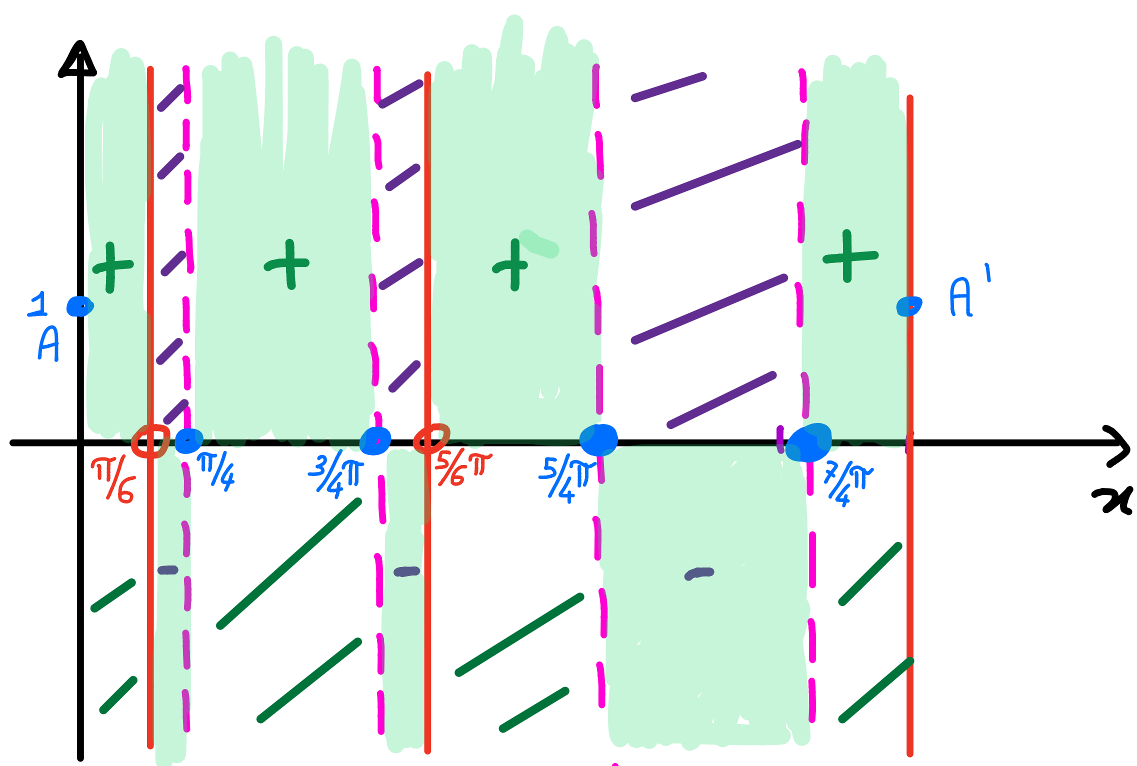
$$\left[0; \frac{\pi}{6}\right[\cup \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi\right] \cup \left]\frac{5}{6}\pi; \frac{5}{4}\pi\right] \cup \left[\frac{7}{4}\pi; 2\pi\right]$$



$6/6 = 1$ $\quad 6/4 = 3/2$ $\quad 3/4 \cdot 6 = 9/2$

N.B. CONVIENE SCEGLIERE $\pi = 6u$ $(12u)$

5. PRIMO APPROCCIO AL GRAFICO:



7. RICERCA DEGLI ASINTOTI ATTRAVERSO I LIMITI AGLI ESTREMI DEL C.E.

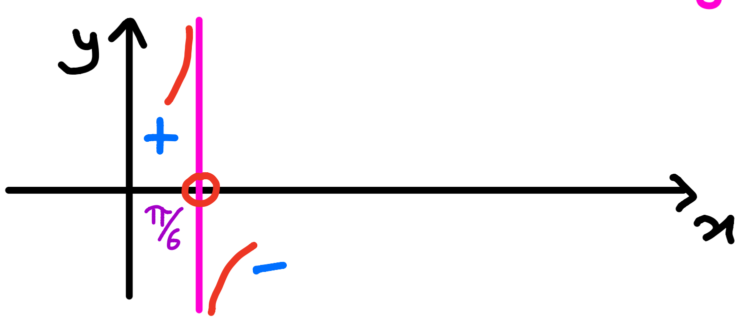
$$f(x) = \frac{2\cos^2 x - 1}{1 - 2\sin x} \qquad D = \left[0; \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi\right[\cup \left]\frac{5}{6}\pi; 2\pi\right]$$

1. $$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}^{\mp}} \frac{2\cos^2 x - 1}{1 - 2\sin x} = \left[\frac{m}{0}\right] = \pm\infty$$

SAPPIAMO CHE π/6 ANNULLA IL DENOMINATORE

N.B. IL SEGNO DELL'INFINITO LO DEDUCIAMO DAL SEGNO DELLA FUNZIONE

ASINTOTO VERTICALE $x = \frac{\pi}{6}$



2. $$\lim_{x \to \frac{5}{6}\pi^{\mp}} \frac{2\cos^2 x - 1}{1 - 2\sin x} = \left[\frac{m}{0}\right] = \mp\infty$$

SAPPIAMO CHE π/6 ANNULLA IL DENOMINATORE

N.B. IL SEGNO DELL'INFINITO LO DEDUCIAMO DAL SEGNO DELLA FUNZIONE

ASINTOTO VERTICALE $x = \frac{5}{6}\pi$

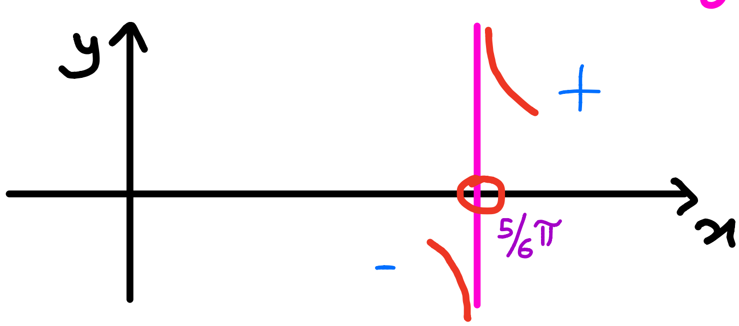
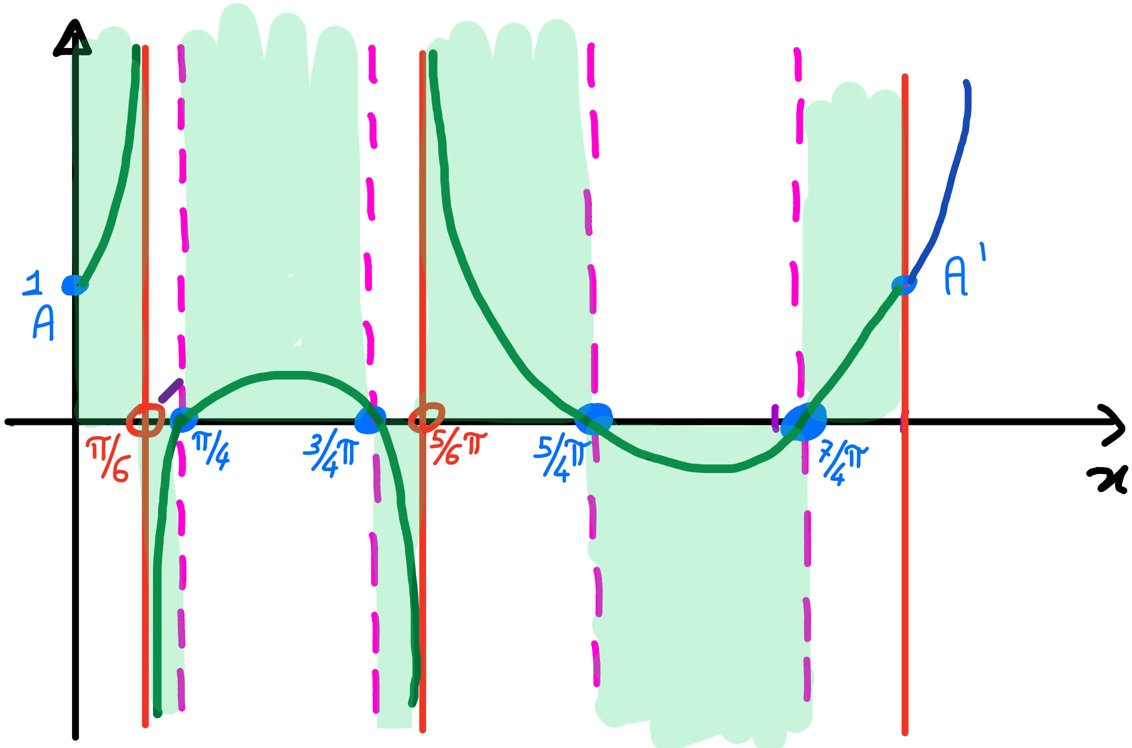


GRAFICO PROBABILE



N.B. LA FUNZIONE È PERIODICA E QUINDI SI RIPETE OGNI 2π

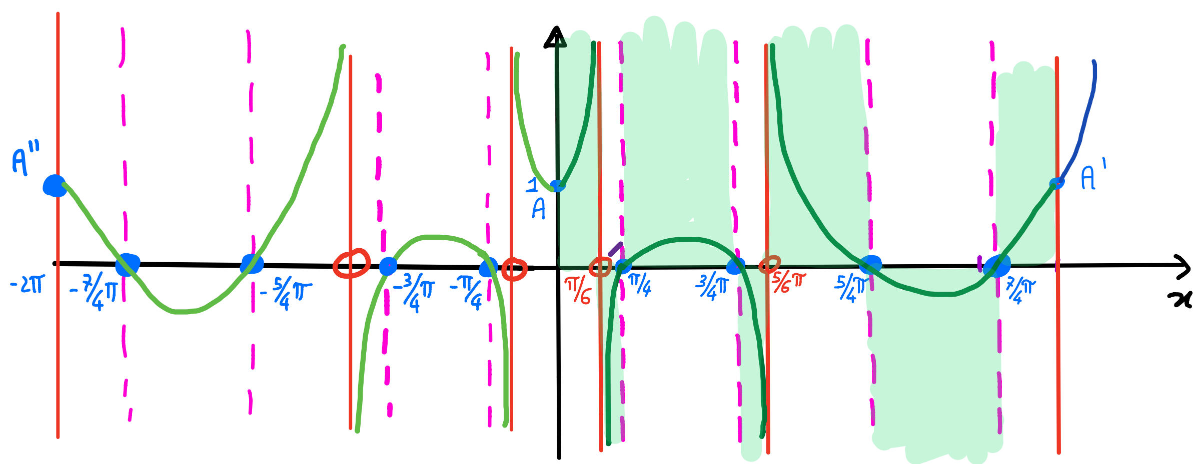
2. $f(x) = \dfrac{2\cos^2 x - 1}{1 - 2\sin|x|}$ $\qquad y = f(|x|)$

SIMMETRIA PARI (ESSENDO $|-x| = |x|$)

BASTERÀ STUDIARE LA FUNZIONE PER $x \geq 0 \Rightarrow y = \dfrac{2\cos^2 x - 1}{1 - 2\sin x}$ E QUINDI CONSIDERARE

IL GRAFICO SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE y (PER $x<0$)

GRAFICO PROBABILE

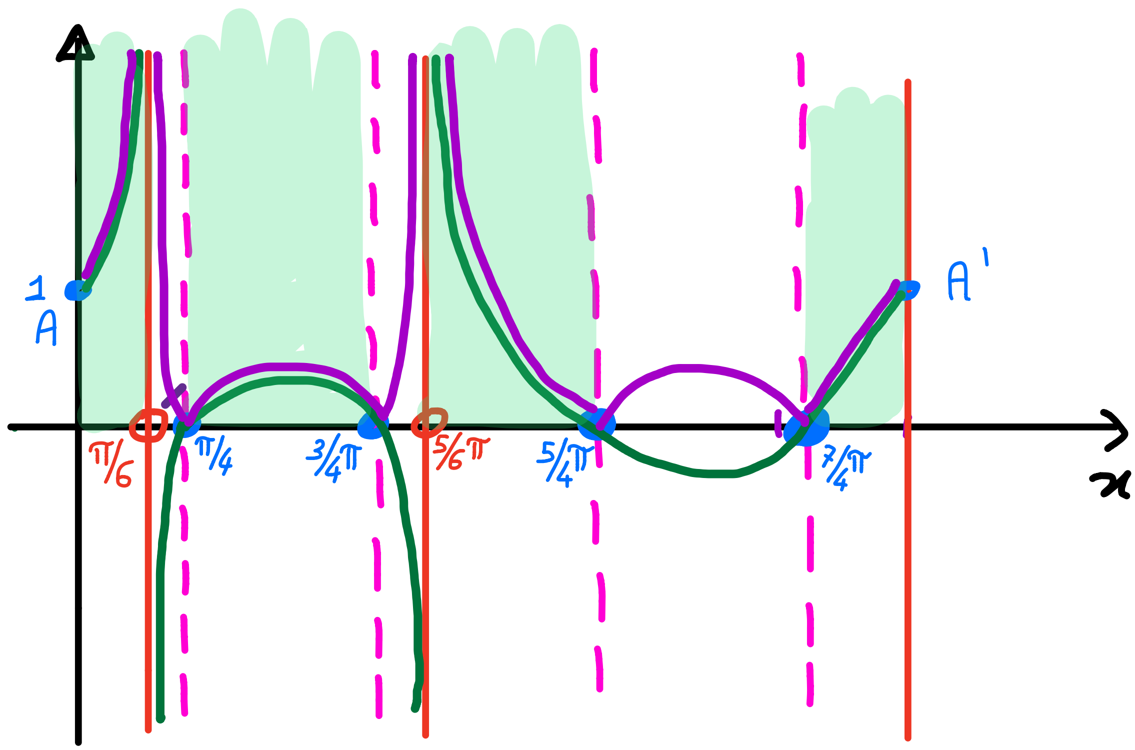


3. $f(x) = \left| \frac{2\cos^2 x - 1}{1 - 2\sin x} \right|$ $\qquad y = |f(x)|$

BASTERÀ RAPRESENTARE IL GRAFICO DELLA FUNZIONE $y = \frac{2\cos^2 x - 1}{1 - 2\sin x}$

E "RIBALTARE" RISPETTO ALL'ASSE x LA PARTE NEGATIVA

GRAFICO PROBABILE $\quad y = |f(x)|$



4. $f(x)=\left|\dfrac{2\cos^2 x-1}{1-2\sin|x|}\right|$ $\qquad y=|f(|x|)|$

SI PARTE DAL GRAFICO DELLA FUNZIONE:

$$y=\frac{2\cos^2 x-1}{1-2\sin|x|} \quad (2)$$

E SI "TRASFORMA" IN POSITIVO LA PARTE NEGATIVA

GRAFICO PROBABILE