Color est e pluribus unus

corso di Matematica

prof. Claudio Desiderio

Modulo 1: derivate

Funzioni reali di variabile reale

Unita' 2 parte 3 : **approfondimento dimostrazioni**

- **Algebra delle derivate:**
- **somma**
- **prodotto**
- **quoziente**

"Non accontentarti di restare nel GRIGIO per paura
del NERO, ma punta dritto al BIANCO..
e tuffati dentro!
Entra nel vortice.. quindi, rallenta:
ritroverai tutti i COLORI
e farai splendere sempre la tua Vita!!"

DERIVATA DI UNA SOMMA

1\. DIMOSTRIAMO CHE: $\boxed{D(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x)}$

SIANO $f(x)$ E $g(x)$ DUE FUNZIONI DEFINITE IN UN GENERICO INTERVALLO $(a;b)$

SIA $x_0 \in (a,b)$
SIANO INOLTRE $f(x)$ E $g(x)$ DERIVABILI IN x_0

SIA $F(x) = f(x) + g(x)$

DIMOSTRIAMO CHE: $F'(x) = f'(x) + g'(x)$

POSSIAMO SCRIVERE QUESTO TEOREMA USANDO UN LINGUAGGIO PIÙ RIGOROSO:

$$\text{hp}\begin{cases} f,g:(a;b)\rightarrow\mathbb{R} \\ f,g \text{ CONTINUE IN } (a,b) \\ f,g \text{ DERIVABILI IN } (a,b) \\ F(x) = f(x)+g(x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{tesi} \\ F'(x) = f'(x)+g'(x) \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE SIA $x_0 \in (a,b)$

SI CONSIDERA IL RAPPORTO INCREMENTALE

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h} =$$

$$= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

QUINDI :

$$F'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\Delta f(x)}{h} + \frac{\Delta g(x)}{h} \right) =$$

$$F'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

POICHÈ QUESTA RELAZIONE È VERA $\forall x_0 \in (a;b)$ SI AVRÀ

$$F'(x) = f'(x) + g'(x)$$

② DERIVATA DI UN PRODOTTO

DIMOSTRIAMO CHE :

$$\boxed{D\left(f(x)\cdot g(x)\right)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)}$$

NELLE STESSE IPOTESI DEL TEOREMA PRECEDENTE, CON:

$$F(x)=f(x)\cdot g(x)$$

CONSIDERIAMO IL RAPPORTO INCREMENTALE IN x_0

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h}=*$$

AGGIUNGENDO E SOTTRAENDO: $f(x_0)\cdot g(x_0+h)$

SI AVRÀ :

$$*=\frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)\,g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}=$$

METTENDO IN EVIDENZA E SEPARANDO LA SOMMA, SI OTTIENE:

$$= \frac{g(x_0+h)\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right)}{h} + \frac{f(x_0)\left(g(x_0+h)-g(x_0)\right)}{h} =$$

$$= g(x_0+h)\cdot \frac{\Delta f(x_0)}{h} + f(x_0)\frac{\Delta g(x_0)}{h}$$

$f'(x_0)$ $\qquad$ $g'(x_0)$

UTILIZZANDO ORA LA DEFINIZIONE DI DERIVATA:
(OVVERO PASSANDO AL LIMITE PER $h \to 0$

$$D\left(f(x_0)\cdot g(x_0)\right) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

POICHÈ QUESTA RELAZIONE È VERA $\forall x_0 \in (a;b)$ SI AVRÀ

$$\boxed{D\left(f(x)\cdot g(x)\right) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)}$$

3 DERIVATA DI UN QUOZIENTE

DIMOSTRIAMO CHE:

$$\boxed{D\,\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}}$$

NELLE STESSE IPOTESI DEI TEOREMI PRECEDENTI, CON

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

CONSIDERIAMO IL RAPPORTO INCREMENTALE IN x_0

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x}=\frac{\dfrac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)}-\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{h}= \quad \rightsquigarrow \text{m.c.m.}$$

$$=\frac{\dfrac{f(x_0+h)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0+h)}{g(x_0+h)\cdot g(x_0)}}{h}=$$

AGGIUNGENDO E SOTTRAENDO: $f(x_0)\cdot g(x_0)$

SI AVRÀ:

$$=\frac{\dfrac{f(x_0+h)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0+h)}{g(x_0+h)\cdot g(x_0)}}{h}=$$

E SEPARANDO LE FRAZIONI :

$$= \frac{\dfrac{f(x_0+h)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{g(x_0+h)\cdot g(x_0)} + \dfrac{f(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x_0+h)}{g(x_0+h)\cdot g(x_0)}}{h} =$$

$$= \frac{g(x_0)}{\underbrace{g(x_0+h)}_{\to g(x_0)}\, g(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\to f'(x)} +$$

CAMBIANDO I SEGNI

$$- \frac{f(x_0)}{\underbrace{g(x_0+h)}_{\to g(x_0)}\, g(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{\to g'(x_0)}$$

CONSIDERANDO IL LIMITE PER $h \to 0$ UTILIZZANDO LA DEFINIZIONE DI DERIVATA, SI AVRÀ:

$$F'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = \frac{g(x_0)}{g(x_0)^2} \cdot f'(x) - \frac{f(x_0)}{g(x_0)^2} \cdot g'(x_0) =$$

$$= \frac{g(x_0) f'(x) - f(x_0) g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

POICHÈ QUESTA RELAZIONE È VERA $\forall x_0 \in (a;b)$ SI AVRÀ LA NOSTRA TESI.