Color est e pluribus unus

corso di Matematica

prof. Claudio Desiderio

Modulo 1: derivate
Funzioni reali di variabile reale

Unita' 3:

Esercizi su calcolo derivate con regole semplici

- Calcolo di derivate di funzioni elementari
- Calcolo della derivata di una somma
- Calcolo della derivata di un prodotto
- Calcolo della derivata di un quoziente
- Tangente e cotangente

"Non accontentarti di restare nel GRIGIO per paura

del NERO, ma punta dritto al BIANCO..

e tuffati dentro!

Entra nel vortice.. quindi, rallenta:

ritroverai tutti i COLORI

e farai splendere sempre la tua Vita!!"

PREMESSA

DERIVARE NON È COSÌ DIFFICILE COME SEMBRA!

UTILIZZANDO LA DEFINIZIONE, SI DIMOSTRANO UNA VOLTA PER TUTTE, LE REGOLE DI DERIVAZIONE CHE RENDONO ESTREMAMENTE SEMPLICE IL CALCOLO DI UNA DERIVATA

RICHIAMIAMO SUBITO LE

REGOLE DI DERIVAZIONE "SEMPLICI"

PREMESSO CHE INDICHIAMO LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE CON IL SIMBOLO $Df(x) = f'(x)$

$$DK = 0$$
$$Dx = 1$$
$$Dx^m = m x^{m-1}$$

EX $D5 = 0$ $\quad D\sqrt{5} = 0$

$Dx^2 = 2x$

$Dx^3 = 3x^2$

$$D \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$$
$$D \ln x = \frac{1}{x}$$
$$D a^x = a^x \ln a$$
$$D e^x = e^x$$

EX

$D \log_5 x = \frac{1}{x \ln 5}$

$D 5^x = 5^x \ln 5$

$$D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$D\sqrt[m]{x^n} = \frac{n}{m\sqrt[m]{x^{m-n}}}$$

$$D \sin x = \cos x$$
$$D \cos x = -\sin x$$

EX $D\sqrt[4]{x^3} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x^{4-3}}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

QUESTE "SEMPLICI" REGOLE SI POSSONO METTERE INSIEME CON LE OPERAZIONI ; VEDIAMO ADESSO SOLO LE 2 OPERAZIONI PIÙ SEMPLICI

$$\boxed{Df(x) = f'(x) = y'}$$

SOMMA :

$$\boxed{D\big(f(x)+g(x)\big) = \underbrace{f'(x)}_{Df(x)} + \underbrace{g'(x)}_{Dg(x)}}$$

ESEMPI

$$\boxed{\begin{array}{l} DK = 0 \\ Dx = 1 \\ Dx^n = nx^{n-1} \end{array}}$$

1. $f(x) = x^2 + x + 1$

$f'(x) = Dx^2 + Dx + D1 = 2x + 1 + 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} D\sin x = \cos x \\ D\cos x = -\sin x \end{array}}$$

2. $f(x) = \sin x + \cos x + \sqrt{2}$

$f'(x) = D\sin x + D\cos x + D\sqrt{2} = \cos x - \sin x + 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} D\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a} \\ D\ln x = \frac{1}{x} \\ Da^x = a^x \ln a \\ De^x = e^x \end{array}}$$

3. $f(x) = \ln x + 2^x + 3$

$f'(x) = D\ln x + D2^x + D3 = \frac{1}{x} + 2^x \ln 2 + 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ D\sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}} \end{array}}$$

4. $f(x) = \sqrt{x} + \log_2 x + \sqrt{2} + \log_2 3$

$f'(x) = D\sqrt{x} + D\log_2 x + D\sqrt{2} + D\log_2 3 = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x\ln 2} + 0$

NELLE PROSSIME LEZIONI METTEREMO IN PRATICA E APPROFONDIREMO

DERIVATA DI UNA COSTANTE PER UNA FUNZIONE

$$\boxed{DK \cdot f(x) = K \cdot f'(x)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} DK = 0 \\ Dx = 1 \\ Dx^n = nx^{n-1} \end{array}}$$

ESEMPI

1. $f(x) = 3x \qquad f'(x) = D3 \cdot x = 3 \cdot Dx = 3 \cdot 1 = 3$

2. $f(x) = 4x^2 + 5x + 1$

$f'(x) = D4 \cdot x^2 + D5 \cdot x + D1 = 4 \cdot 2x + 5 \cdot 1 + 0 =$

$= 8x + 5$

3. $f(x) = 2\ln x - 3$

$f'(x) = D2 \cdot \ln x - D3 = 2 \cdot \frac{1}{x} - 0 = \frac{2}{x}$

$$\boxed{\begin{array}{l} D\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a} \\ D\ln x = \frac{1}{x} \\ Da^x = a^x \ln a \\ De^x = e^x \end{array}}$$

4. $f(x) = 5e^x + 1$

$f'(x) = 5e^x$

$$\boxed{\begin{array}{l} D\sin x = \cos x \\ D\cos x = -\sin x \end{array}}$$

5. $f(x) = \sqrt{3}\sin x - 2\cos x + 1$

$f'(x) = D\sqrt{3} \cdot \sin x - D2 \cdot \cos x + D1 = \sqrt{3}\cos x + 2\sin x$

6. $f(x) = 3\sqrt{x} - 4x + 2$

$f'(x) = D3\sqrt{x} - D4 \cdot x + D2 =$

$= 3\frac{1}{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 1 + 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ D\sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}} \end{array}}$$

PROVACI SUBITO TU...

1. $f(x) = 5x^2 + 4x + 2$ $\qquad f'(x) = ?$
2. $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7$ $\qquad f'(x) = ?$
3. $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 1$ $\qquad f'(x) = ?$
4. $f(x) = \log_2 x + 3\log_5 x$ $\qquad f'(x) = ?$
5. $f(x) = 2\ln x - 2^x + e^x$ $\qquad f'(x) = ?$
6. $f(x) = 3\log_2 x - 3^x + x^3$ $\qquad f'(x) = ?$
7. $f(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}$ $\qquad f'(x) = ?$
8. $f(x) = 2\sqrt[5]{x^3}$ $\qquad f'(x) = ?$
9. $f(x) = 3\sin x - 2\cos x$ $\qquad f'(x) = ?$
10. $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \sqrt{2}\cos x + 1$ $\qquad f'(x) = ?$
11. $f(x) = 3x^2 - 3^x + \sqrt[3]{x} - 3\sin x$ $\qquad f'(x) = ?$

② DERIVATA DI UN PRODOTTO

$$\boxed{D\big(f(x)\cdot g(x)\big)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)}$$

ESEMPI :

$$\boxed{\begin{array}{ll} Dx^2=2x & D\ln x=\frac{1}{x} \\ Dx=1 & De^x=e^x \end{array}}$$

1. $f(x)=x\cdot\ln x$

$$f'(x)=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$$

2. $f(x)=x^2\cdot e^x$

$$f'(x)=2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x=e^x\cdot x\,(2+x)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} D\sin x=\cos x \\ D\cos x=-\sin x \end{array}}$$

3. $f(x)=x\cdot\sin x+1$

$$f'(x)=1\cdot\sin x+x\cdot\cos x+0$$

4. $f(x)=x^2\cdot\sin x\cdot\ln x$

$$f'(x)=2x\cdot\sin x\cdot\ln x+x^2\cdot\cos x\cdot\ln x+x^{\cancel{2}}\cdot\sin x\cdot\frac{1}{\cancel{x}}$$

DERIVATA DI UNA COSTANTE PER UNA FUNZIONE

$$\boxed{D\,K\cdot f(x) = K\cdot f'(x)}$$

DIMOSTRAZIONE
(USANDO LA DERIVATA DI UN PRODOTTO)

$$D\big(K\cdot f(x)\big) = \underbrace{(D\,K)}_{=0}\cdot f(x) + K\cdot\big(D\,f(x)\big) =$$

$$= 0\cdot f(x) + K\cdot f'(x) = K\cdot f'(x)$$

PROVACI SUBITO TU...

1. $f(x) = 2x\cdot \ln x$ $\qquad f'(x) = ?$ $\qquad f'(1)$
2. $f(x) = 3x^2\cdot e^x$ $\qquad f'(x) = ?$ $\qquad f'(0)$
3. $f(x) = 2x^2\cdot \sin x$ $\qquad f'(x) = ?$ $\qquad f'(0)$
4. $f(x) = x\cdot \sqrt{x}$ $\qquad f'(x) = ?$ $\qquad f'(4)$
5. $f(x) = x^2\sqrt[3]{x^2}$ $\qquad f'(x) = ?$ $\qquad f'(8)$

DERIVATA DI UN QUOZIENTE

$$\boxed{D\,\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}}$$

ESEMPI

$$\boxed{\begin{array}{l} Dk = 0 \\ Dx = 1 \\ Dx^2 = 2x \end{array}}$$

1. $f(x) = \dfrac{2x-1}{4x+1}$

$$f'(x) = \frac{2\cdot(4x+1) - (2x-1)\cdot 4}{(4x+1)^2} = \frac{\cancel{8x}+2-\cancel{8x}+4}{(4x+1)^2} = \frac{6}{(4x+1)^2}$$

2. $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x^2-1) - (x^2-3x+2)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{2x^3}-2x-3x^2+3-\cancel{2x^3}+6x^2-4x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2-6x+3}{(x^2-1)^2}$$

3. $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$

$$\boxed{De^x = e^x}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - (e^x + 1)e^x}{(e^x - 1)^2} =$$

CONSIGLIO IMPORTANTE: METTI SEMPRE IN EVIDENZA QUANDO PUOI!!

$$= \frac{e^x\left[\cancel{e^x} - 1 - \cancel{e^x} - 1\right]}{(e^x - 1)^2} =$$

E MAI SVILUPPARE IL QUADRATO AL DENOMINATORE!!

$$= -\frac{2e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$\boxed{D\ln x = \frac{1}{x}}$$

4. $f(x) = \dfrac{2\ln x - 1}{x}$

NON AVER PAURA, SVILUPPANDO SEMPLICI OPERAZIONI TROVERAI UNA FORMA PIÙ SEMPLICE

$$f'(x) = \frac{2\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x} - (2\ln x - 1)\cdot 1}{(x)^2} =$$

$$= \frac{2 - 2\ln x + 1}{x^2} = \frac{3 - 2\ln x}{x^2}$$

5. $$f(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x + \sin x}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} D \sin x = \cos x \\ D \cos x = -\sin x \end{array}}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot (\cos x + \sin x) - (\sin x - 1)(-\sin x + \cos x)}{(\cos x + \sin x)^2} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \cancel{\cos x \sin x} + \sin^2 x - \cancel{\sin x \cos x} - \sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^2} =$$

$$= \frac{1 - \sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^2}$$

IN GONIOMETRIA, TIENI SEMPRE CONTO CHE $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

UN ESEMPIO IMPORTANTE

LA DERIVATA DELLA TANGENTE

$$D \tan x = D \frac{\sin x}{\cos x} =$$

È LA DERIVATA DI UN QUOZIENTE

$D \sin x = \cos x$ $\quad$ $D \cos x = -\sin x$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x (-\sin x)}{(\cos x)^2} =$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$\tan^2 x$

$$D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$$

ANALOGAMENTE SI DIMOSTRA:

$$D\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$$

ADESSO PROVACI TU...

1. $f(x) = \dfrac{x^2+5x+4}{x^2-5x+4}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{10(4-x^2)}{(x^2-5x+4)^2}$

2. $f(x) = \dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{-2}{x(1+\ln x)^2}$

3. $f(x) = \dfrac{2e^x-1}{1-e^x}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{e^x}{(1-e^x)^2}$

4. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$

5. $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{\sqrt{x}\,\ln x}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{\ln^2 x+\ln x+2}{2x\sqrt{x}\,\ln^2 x}$

6. $f(x) = 2\tan x - \cos x + 1$ $\qquad f'(x) = 2+2\tan^2 x+\sin x$