

# Color est pluribus unus

corso di Matematica

prof. Claudio Desiderio

## Modulo 1: derivate

### Funzioni reali di variabile reale

#### Unita' 4:

Esercizi su calcolo derivate di funzioni composte

- **derivate di potenze composte**
- **derivate di radici composte**
- **funzioni logaritmiche composte**
- **funzioni esponenziali composte**
- **funzioni Goniometriche composte**

"Non accontentarti di restare nel GRIGIO per paura  
del NERO, ma punta dritto al BIANCO..

e tuffati dentro!

Entra nel vortice.. quindi, rallenta:

ritroverai tutti i COLORI

e farai splendere sempre la tua Vita!!"

$$Df(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$D(g(x))^m = m(g(x))^{m-1} \cdot g'(x)$$

$$D\sqrt{g(x)} = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)$$

$$D\sqrt[m]{g(x)} = \frac{1}{m\sqrt[m]{g(x)^{m-m}}} \cdot g'(x)$$

$$D \log_a g(x) = \frac{1}{g(x) \ln a} g'(x)$$

$$D \ln g(x) = \frac{1}{g(x)} g'(x)$$

$$D_a g(x) = a^{\frac{1}{g(x)}} \cdot \ln a \cdot g'(x)$$

$$D e^{g(x)} = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

$$D \sin g(x) = \cos g(x) \cdot g'(x)$$

$$D \cos g(x) = -\sin g(x) \cdot g'(x)$$

$$D \tan g(x) = (\sec^2 g(x)) \cdot g'(x)$$

$$D \cot g(x) = -(\csc^2 g(x)) \cdot g'(x)$$

# DERIVATE COMPOSTE (THE CHAIN RULE)

## REGOLA GENERALE

$$Df(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

APPLICAZIONI:

DALLA REGOLA SEMPLICE ALLA REGOLA COMPOSTA

$$\textcircled{1} D x^m = m x^{m-1} \Rightarrow D(g(x))^m = m (g(x))^{m-1} \cdot g'(x)$$

ESEMPI

$$1) D(x^2 - 3x + 2)^3 = 3(x^2 - 3x + 2)^2 \cdot (2x - 3)$$

$$2) D(3x - 2)^4 = 4(3x - 2)^3 \cdot 3 = 12(3x - 2)^3$$

$$3) D \ln^2 x = D(\ln x)^2 = 2(\ln x)^1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$4) D \sin^2 x = D(\sin x)^2 = 2(\sin x)^1 \cos x = \sin 2x$$

↑ FORMULA DI DUPLICAZIONE

PROVACI TU

$$1) D(4x^2 - 4x + 3)^3 =$$

$$2) D \cos^3 x$$

$$3) D \ln^4 x =$$

$$② D\sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$D\sqrt{g(x)} = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)$$

ESEMPI

$$1) D\sqrt{4x^2-x} = \frac{1}{2\sqrt{4x^2-x}} \cdot (8x-1) = \frac{8x-1}{2\sqrt{4x^2-x}}$$

$$2) D\sqrt{\sin x} = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot (\cos x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

$$3) D\sqrt{e^n+1} = \frac{1}{2\sqrt{e^n+1}} (e^n) = \frac{e^n}{2\sqrt{e^n+1}}$$

$$4) D\sqrt{\ln n-2} = \frac{1}{2\sqrt{\ln n-2}} \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n\sqrt{\ln n-2}}$$

PROVACI TU...

$$a) D\sqrt{x^2-3x+2} =$$

$$b) D\sqrt{4-2e^n} =$$

$$c) D\sqrt{3+2\ln n} =$$

IN GENERALE:

$$D\sqrt[m]{g(x)} = \frac{1}{m\sqrt[m]{g(x)^{m-m}}} \cdot g'(x)$$

EX.

$$D\sqrt[4]{(4x^2-3x+5)^3} = \frac{3}{4\sqrt[4]{(4x^2-3x+5)^{3-1}}} \cdot (8x-3)$$

$$\textcircled{3} \quad D \log_a x = \frac{1}{x \ln a} \Rightarrow D \log_a g(x) = \frac{1}{g(x) \ln a} g'(x)$$

$$3b. \quad D \ln x = \frac{1}{x} \Rightarrow D \ln g(x) = \frac{1}{g(x)} g'(x)$$

## ESEMPI

$$1) \quad D \ln(2x-1) = \frac{1}{2x-1} \cdot (2) = \frac{2}{2x-1}$$

$$2) \quad D \ln(\sin x - 1) = \frac{1}{\sin x - 1} \cdot (\cos x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$$

$$3) \quad D \ln(x^2 - x) = \frac{1}{x^2 - x} \cdot (2x-1) = \frac{2x-1}{x^2 - x}$$

$$4) \quad D \log_2(\sqrt{x}-1) = \frac{1}{(\sqrt{x}-1)\ln 2} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)\ln 2}$$

ADESSO PROVACI TU...

$$a) \quad D \ln(x^2 + x) =$$

$$b) \quad D \ln(e^x - 1) =$$

$$c) \quad D \log_3(\sqrt{x} + 2) = \frac{1}{e^x - 1} \cdot e^x = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$d) \quad D \ln(\tan x + 1)$$

4.

$$D_a^x = a^x \cdot \ln a \Rightarrow D_a^{g(x)} = a^{g(x)} \cdot \ln a \cdot g'(x)$$

4 bis.

$$D_e^x = e^x \Rightarrow D_e^{g(x)} = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

### ESEMPI

$$1) D e^{x^2-x} = e^{x^2-x} \cdot (2x-1)$$

$$2) D 2^{3x-1} = 2^{3x-1} \cdot (3) \cdot \ln 2$$

$$3) D e^{\sin x} = e^{\sin x} \cdot (\cos x)$$

$$4) D e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

ADESSO PROVACI TU...

a)  $D_3^{x^2-3x+2}$

b)  $D e^{\sqrt{2x}}$

c)  $D e^{\cos x - 1}$

d)  $D e^{x-x^2}$

$$5. D \sin x = \cos x \Rightarrow D \sin g(x) = \cos g(x) \cdot g'(x)$$

$$6. D \cos x = -\sin x \Rightarrow D \cos g(x) = -\sin g(x) \cdot g'(x)$$

### ESEMPI

$$1) D \sin 3x = \cos 3x \cdot (3) = 3 \cos 3x$$

$$2) D \cos x^2 = -\sin x^2 \cdot (2x) = -2x \sin x^2$$

$$3) D \sin e^x = \cos e^x \cdot (e^x) = e^x \cos e^x$$

$$4) D \cos \sqrt{x} = -\sin \sqrt{x} \cdot \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = -\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

ADESSO PROVACI TU...

$$a) D \cos(2x-1) =$$

$$b) D \sin \ln x =$$

$$c) D \cos(x^2-x) =$$

$$d) D \sin \sqrt{2x-1} =$$

$$x. D \tan x = (1 + \tan^2 x)$$

$$D \tan g(x) = (1 + \tan^2 g(x)) \cdot g'(x)$$

$$8. D \cot x = - (1 + \cot^2 x)$$

$$D \cot g(x) = - (1 + \cot^2 g(x)) g'(x)$$

## ESEMPI

$$1) D \tan \ln x = (1 + \tan^2 \ln x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$2) D \cot x^3 = - (1 + \cot^2 x^3) 3x^2$$

$$3) D \tan e^x = (1 + \tan^2 e^x) \cdot e^x$$

ADESSO PROVACI TU...

$$a) D \tan(2x-1) =$$

$$b) D \cot \ln x =$$

$$c) D \tan(x^2 - x) =$$

## DERIVATE COMPOSTE PIÙ DIFFICILI ESEMPI

$$1) f(x) = \sqrt{\ln(x^2 - x)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2 - x)}} \cdot \frac{1}{(x^2 - x)} \cdot (2x - 1) =$$

$$D\sqrt{g(x)} \quad D\ln g(x)$$

$$= \frac{2x - 1}{2(x^2 - x)\sqrt{\ln(x^2 - x)}}$$

$$2) f(x) = \ln \sqrt{\sin 4x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin 4x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin 4x}} \cos 4x \cdot \cancel{4} =$$

$$= \frac{2 \cos 4x}{\sin 4x} = 2 \cot 4x$$

PROVACI TU...

$$1) f(x) = \ln^3 \sin e^{2x}$$

$$f'(x) = 3 \ln^2 \sin e^{2x} \cdot \cos e^{2x} \cdot e^{2x} \cdot 2$$

$$2) f(x) = e^{\sqrt{\cos \ln 2x}}$$

$$f'(x) = e^{\sqrt{\cos \ln^2 x}} \cdot \frac{1}{2 \sqrt{\cos \ln^2 x}} \cdot (-\sin \ln^2 x)$$

$$3) f(x) = \cos^2 \sqrt{e^{2x-1}} = D \left[ \cos \sqrt{e^{2x-1}} \right]^2 \quad 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$4) f(x) = \tan \ln(2x-1)$$

$$5) f(x) = \cot^2 e^{2x}$$

ALTRI ESEMPI IMPORTANTI

1.  $f(x) = x^2 \cdot \ln x^2$  ↗ COMPOSTA  
      ↑  
      PRODOTTO

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot \ln x^2 + x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \\ &= 2x \cdot \ln x^2 + 2x = 2x \cdot (\ln x^2 + 1) \end{aligned}$$

PROVACI TU...

$$f(x) = (x^2 + x) \cdot e^{x^2}$$

2.

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{(2x+1)^2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-1) \cdot (2x+1)^2 - (x^2 - x) \cdot 2(2x+1)^1 \cdot 2}{[(2x+1)^2]^2} = \\ &\text{METTIAMO IN EVIDENZA } (2x+1) \\ &= \frac{(2x+1) \left[ (2x-1)(2x+1)^1 - 4(x^2 - x) \right]}{(2x+1)^4} = \end{aligned}$$

SEMPLIFICHIAMO E SVOLGIAMO LE OPERAZIONI AL NUMERATORE

$$= \frac{4x^2 - 1 - 4x^2 + 4x}{(2x+1)^3} = \frac{4x - 1}{(2x+1)^3}$$

PROVACI TU...

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x^2 - x)^2}$$

3.

$$f(x) = \frac{4x - 3}{\sqrt{2x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{(4) \cdot \sqrt{2x+1} - (4x - 3) \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot 2}{[\sqrt{2x+1}]^2} =$$

M.C.M. AL NUMERATORE

$$= \frac{4(2x+1) - (4x - 3)}{\sqrt{2x+1}} =$$

MOLTIPLICHIAMO I 2 DENOMINATORI

E SVOLGIAMO LE OPERAZIONI AL NUMERATORE

$$= \frac{8x + 4 - 4x + 3}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} = \frac{4x + 7}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$$

PROVACI TU...

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{2x-2}}$$