Color est e pluribus unus

corso di Matematica

prof. Claudio Desiderio

Modulo 1: derivate

Funzioni reali di variabile reale

Unita' 5:

approfondimenti

- derivate di funzioni circolari inverse
- derivata di arcseno
- derivata di arcocoseno
- derivata di arctangente e arcocotangente
- Ultima regola di derivazione

"Non accontentarti di restare nel GRIGIO per paura del NERO, ma punta dritto al BIANCO..

e tuffati dentro!

Entra nel vortice.. quindi, rallenta:

ritroverai tutti i COLORI

e farai splendere sempre la tua Vita!!"

DERIVATA DI UNA FUNZIONE INVERSA

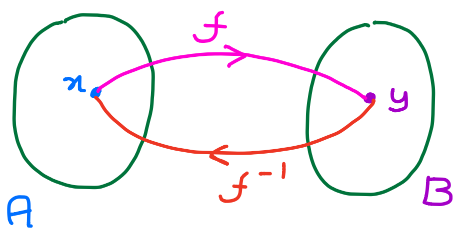
RICHIAMIAMO BREVEMENTE LA DEFINIZIONE DI FUNZIONE INVERSA:

SE $f: A \to B$ È BIUNIVOCA

ALLORA ESISTE LA FUNZIONE INVERSA:

$$f^{-1}: B \to A$$

DEFINITA DALLA LEGGE:



$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

EBBENE:

SIA $x_0 \in X$ ED $f(x_0) = y_0$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE:

REGOLA DELLA DERIVATA INVERSA

$$\boxed{Df^{-1}(y_0) = \frac{1}{Df(x_0)}}$$

CON $f^{-1}(y_0) = x_0$

ESEMPI

1.
$$\boxed{D\,\text{arcsin}\,x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

INFATTI, SIA:

INTERVALLO IN CUI È INVERTIBILE

$$f(x) = \sin x = y \qquad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

LA FUNZIONE INVERSA È:

$$x = \text{arcsin}\,y = f^{-1}(y)$$

$$Df^{-1}(y_0) = \frac{1}{Df(x_0)} = \frac{1}{D\sin x_0} = \frac{1}{\cos x_0} =$$

DALLA RELAZIONE FONDAMENTALE:

$\cos x > 0$ in $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\underbrace{\sin^2 x}_{\sin x = y}} = \pm\sqrt{1-y^2}$$

INVERTENDO x CON y (COME SI FA PER TROVARE LE FUNZIONI INVERSE) SI HA:

$$D\,\text{arcsin}\,x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ANALOGAMENTE SI DIMOSTRA:

$$D\,\text{arccos}\,x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

DIMOSTRIAMO CHE:

$$\boxed{D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}}$$

INFATTI, SIA:

INTERVALLO IN CUI E' INVERTIBILE

$$f(x) = \tan x = y \qquad x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

LA FUNZIONE INVERSA E':

$$x = \arctan y = f^{-1}(y)$$

$$D f^{-1}(y_0) = \frac{1}{D f(x_0)} = \frac{1}{D \tan x_0} = \frac{1}{1+\tan^2 x_0} = \frac{1}{1+y_0^2}$$

$\tan x = y$

INVERTENDO x CON y (COME SEMPRE!!)

SI HA: $$D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

ANALOGAMENTE SI DIMOSTRA:

$$D \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$$

FUNZIONI COMPOSTE

$$D \arcsin g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-g(x)^2}} \cdot g'(x)$$

$$D \arccos g(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-g(x)^2}} \cdot g'(x)$$

$$D \arctan g(x) = \frac{1}{1+g(x)^2} \cdot g'(x)$$

$$D \operatorname{arccot} g(x) = -\frac{1}{1+g(x)^2} \cdot g'(x)$$

ESEMPI

1. $f(x) = \arcsin(\ln x)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$$

2. $f(x) = \arctan\left(\sqrt{x}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\left(1+x\right)\sqrt{x}}$$

PROVACI TU...

1) $f(x) = \arcsin 2x$

2) $f(x) = \arctan \ln 2x$

3) $f(x) = \arcsin^2 \sqrt{x}$

4) $f(x) = \sqrt{\arctan e^x}$

ULTIMA REGOLA DI DERIVAZIONE

$$D f(x)^{g(x)}$$

SI UTILIZZA UNA PROPRIETÀ DEI LOGARITMI

$$a^{\log_a b} = b \quad \text{AND} \quad e^{\ln b} = b$$

PONENDO :

$$b = f(x)^{g(x)} \quad \text{ED} \quad a = e$$

SI HA :

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$

QUINDI SI FA LA DERIVATA DI UNA ESPONENZIALE

$$D f(x)^{g(x)} = D e^{g(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{PRODOTTO}}}{\cdot} \ln f(x)} =$$

$$= \underbrace{e^{g(x) \cdot \ln f(x)}}_{f(x)^{g(x)}} \cdot \left\{ g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \frac{f(x)}{f'(x)} \right\}$$

NON CONVIENE IMPARARE LA FORMULA A MEMORIA, MA APPLICARE SEMPRE LA PROPRIETÀ DEI LOGARITMI E LA DERIVATA DELLA FUNZIONE ESPONENZIALE

ESEMPIO:

$$D\,x^{2x} = D\,e^{\ln x^{2x}} = D\,e^{\overbrace{2x\cdot\ln x}^{\text{PRODOTTO}}}$$

ESPONENZIALE COMPOSTA

$$= x^{2x}\cdot\left\{2\cdot\ln x + 2\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\right\} = 2\cdot x^{2x}(\ln x + 1)$$

SI RIPORTA NELLA SUA FORMA ORIGINALE

PROVACI TU...

1) $f(x) = (x+1)^{x-1}$

2) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

3) $f(x) = (x^2+1)^{x}$

4) $f(x) = (\tan x)^{x}$

UNA DERIVATA LOGARITMICA CURIOSA

$$D\log_{a(x)} b(x) = D\,\frac{\ln b(x)}{\ln a(x)}$$

CHE È LA DERIVATA DI UN QUOZIENTE

ESEMPIO:

$$f(x) = \log_{x}(x-1) = \frac{\ln(x-1)}{\ln x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x-1}\cdot \ln x - \ln(x-1)\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} =$$

$$= \frac{\frac{x\ln x - (x-1)\ln(x-1)}{(x-1)\,x}}{(\ln x)^2} = \dots$$

PROVACI TU..

1) $f(x) = \log_{2x}(x-1)$

2) $f(x) = \log_{\sin x}\cos x$

$$Df^{-1}(y_0) = \frac{1}{Df(x_0)}$$

$$D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D\arctan x = \frac{1}{1+x^2} \qquad D\,\text{arccot}\, x = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$D f(x)^{g(x)}$$

PRODOTTO

$$D x^{2x} = D e^{\ln x^{2x}} = D e^{2x \cdot \ln x}$$

ESPONENZIALE COMPOSTA

$$= x^{2x} \cdot \left\{ 2 \cdot \ln x + 2\cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \right\} = 2 \cdot x^{2x} (\ln x + 1)$$

SI RIPORTA NELLA SUA FORMA ORIGINALE

UNA DERIVATA LOGARITMICA CURIOSA

$$D \log_{a(x)} b(x) = D \frac{\ln b(x)}{\ln a(x)}$$