

REGOLA 1

$$DK = 0$$

SIA $f(x) = k$

DOMINIO: $D = \mathbb{R}$

SIA $x_0 \in D$

CONSIDERIAMO IL RAPPORTO INCREMENTALE

$$f(x_0) = k$$

$$f(x_0 + h) = k$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{k - k}{h} = 0$$

LA DERIVATA DI $f(x) = k$ IN $x_0 \in D$ È

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

E QUESTO È VERO $\forall x_0 \in D$, QUINDI $DK = 0$

DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA

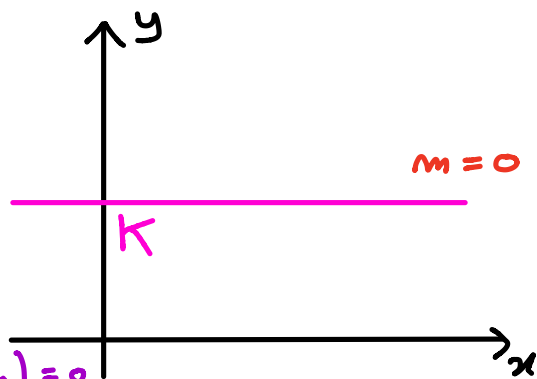
$$f(x) = k \Rightarrow y = k$$

RETTA ORIZZONTALE

$\Rightarrow$ LA RETTA TANGENTE

COINCIDE CON LA RETTA

STESSA $\Rightarrow m_t = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$



REGOLA 2

$$Dx = 1$$

SIA $f(x) = x$

DOMINIO: $D = \mathbb{R}$

SIA $x_0 \in D$

CONSIDERIAMO IL RAPPORTO INCREMENTALE

$$f(x_0) = x_0$$

$$f(x_0 + h) = x_0 + h$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{x_0 + h - x_0}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

LA DERIVATA DI $f(x) = x$ IN $x_0 \in D$ È

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

E QUESTO È VERO $\forall x_0 \in D$, QUINDI $Dx = 1$

DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA

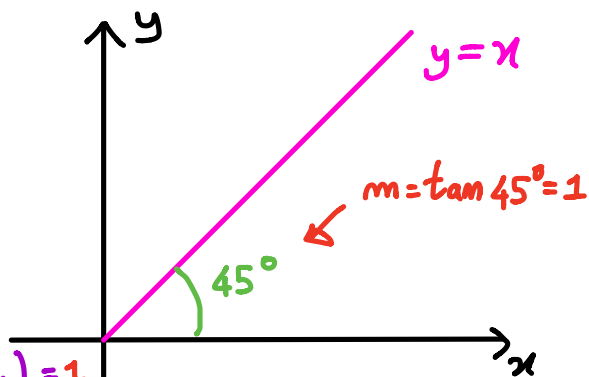
$$f(x) = x \Rightarrow y = x \quad m = 1$$

PRIMA BISETTRICE

$\Rightarrow$ LA RETTA TANGENTE

COINCIDE CON LA RETTA

STESSA $\Rightarrow m_t = 1 \Rightarrow f'(x_0) = 1$



REGOLA 3

$$Dx^2 = 2x$$

SIA $f(x) = x^2$

DOMINIO: $D = \mathbb{R}$

SIA $x_0 \in D$

CONSIDERIAMO IL RAPPORTO INCREMENTALE

$$f(x_0) = x_0^2$$

$$f(x_0+h) = (x_0+h)^2 = x_0^2 + 2hx_0 + h^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\cancel{x_0^2} + 2hx_0 + h^2 - \cancel{x_0^2}}{h} = \\ &= \frac{\cancel{h}(2x_0+h)}{\cancel{h}} = 2x_0 + h \end{aligned}$$

LA DERIVATA DI $f(x) = x^2$ IN $x_0 \in D$ È

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0$$

E QUESTO È VERO $\forall x_0 \in D$,

QUINDI $Dx^2 = 2x$

REGOLA 4 GENERALIZZAZIONE

$$Dx^m = m x^{m-1}$$

SIA $f(x) = x^m$

DOMINIO: $D = \mathbb{R}$

SIA $x_0 \in D$

TRIANGOLO DI TARTAGLIA
(POTENZA DI BINOMIO)

CONSIDERIAMO IL

RAPPORTO INCREMENTALE

$$f(x_0) = x_0^m$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & & 1 \\ & & 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$$f(x_0+h) = (x_0+h)^m = x_0^m + m x_0^{m-1} h + \dots + h^m$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \frac{x_0^m + m x_0^{m-1} h + \dots + h^m - x_0^m}{h} = \\ &= \frac{\cancel{h} (m x_0^{m-1} + \dots + h^{m-1})}{\cancel{h}} = m x_0^{m-1} + h (\dots) \end{aligned}$$

LA DERIVATA DI $f(x) = x^m$ IN $x_0 \in D$ E'

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [m x_0^{m-1} + h (\dots)] = m x_0^{m-1}$$

E QUESTO E' VERO $\forall x_0 \in D$,

QUINDI $Dx^m = m x^{m-1}$

REGOLA 5

SIA $f(x) = \sqrt{x}$

DOMINIO: $D = [0; +\infty)$

SIA $x_0 \in D$

CONSIDERIAMO IL

RAPPORTO INCREMENTALE

$$f(x_0) = \sqrt{x_0} \quad f(x_0+h) = \sqrt{x_0+h}$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h}$$

LA DERIVATA DI $f(x) = \sqrt{x}$ IN $x_0 \in D$ È

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} \quad \begin{matrix} 0 \\ - \\ 0 \end{matrix}$$

RAZIONALIZZANDO

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x_0+h}^1 - \cancel{x_0}}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}} \cdot \frac{1}{\cancel{h}} = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

E QUESTO È VERO $\forall x_0 \in D$,

QUINDI

$$D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

OSS. DIMOSTRAZIONE
SENZA LIMITI. NOTEVOLI

REGOLA 5 *

SIA $f(x) = \sqrt{x}$

DOMINIO: $D = [0; +\infty)$

SIA $x_0 \in D$

CONSIDERIAMO IL

RAPPORTO INCREMENTALE

$$f(x_0) = \sqrt{x_0} \quad f(x_0+h) = \sqrt{x_0+h}$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h}$$

LA DERIVATA DI $f(x) = \sqrt{x}$ IN $x_0 \in D$ È

METTENDO IN EVIDENZA x_0

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0(1+\frac{h}{x_0})} - \sqrt{x_0}}{h}$$

METTENDO IN EVIDENZA $\sqrt{x_0}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0} (\sqrt{1+\frac{h}{x_0}} - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0} \left(\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{1/2} - 1 \right)}{h}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

LIMITE NOTEVOLE

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$$

DIVIDO E MOLTIPLICO PER x_0

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x_0}} = \frac{\sqrt{x_0}}{x_0} \right)$$

E QUESTO È VERO $\forall x_0 \in D$, QUINDI

$$D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

OSS. DIMOSTRAZIONE
CON LIMITI NOTEVOLI

REGOLA 6

GENERALIZZAZIONE

DIMOSTRAZIONE

SEMPLICE

$$D \sqrt[m]{x^m} = \frac{m}{m \sqrt[m]{x^{m-m}}}$$

(SENZA USO DELLA DEFINIZIONE)

(CI METTIAMO NELL'IPOTESI $m > n$)

SI TRATTA DI PENSARE LA RADICE m -ESIMA COME UNA
POTENZA AD ESPONENTE FRAZIONARIO

$$\begin{aligned} D \sqrt[m]{x^m} &= D x^{\frac{m}{m}} = \frac{m}{m} x^{\frac{m}{m} - 1} = \\ &= \frac{m}{m} x^{\frac{m-m}{m}} = \frac{m}{m} x^{\frac{m-m}{m}} = \\ &= \frac{m}{m} x^{\frac{m-m}{m}} = \frac{m}{m} x^{\frac{m-m}{m}} = \\ &= \frac{m}{m} x^{\frac{m-m}{m}} = \frac{m}{m} x^{\frac{m-m}{m}} = \end{aligned}$$

$D x^d = d x^{d-1}$

$m > n \Rightarrow m-n > 0$
QUINDI METTIAMO IL
- IN EVIDENZA

$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

QUINDI $D \sqrt[m]{x^m} = \frac{m}{m \sqrt[m]{x^{m-m}}}$

ESEMPI ED ESERCIZI

$$1. \quad D\sqrt{x} = D x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. USANDO LA DEFINIZIONE DI DERIVATA, DETERMINARE LA DERIVATA DELLE SEGUENTI FUNZIONI NEL PUNTO DI ASCISSA x_0

a) $f(x) = 2x - 3 \quad x_0 = -2$

$$f'(-2) = 2$$

b) $f(x) = x^2 - x \quad x_0 = 0$

SOLUZIONI: $f'(0) = -1$

c) $f(x) = \sqrt{2x+1} \quad x_0 = 4$

$$f'(4) = \frac{1}{3}$$

ESEMPIO SVOLTO

$$f(x) = 2x - x^2 \quad x_0 = -1$$

RAPPORTO INCREMENTALE

$$f(-1) = -2 - 1 = -3$$

$$\begin{aligned} f(-1+h) &= 2(-1+h) - (-1+h)^2 = -2+2h-1-h^2+2h = \\ &= -3+4h-h^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta f(-1)}{\Delta x} = \frac{-3+4h-h^2 - (-3)}{h} = \frac{h(4-h)}{h} = (4-h)$$

QUINDI LA DERIVATA E' :

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f(-1)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} (4-h) = 4$$