Color est e pluribus unus

corso di Matematica

prof. Claudio Desiderio

Modulo 1: derivate

Funzioni reali di variabile reale

Unita' 2 parte 2 :

Dimostrazioni regole di derivazione

- **Derivate delle funzioni logaritmiche**
- **Derivate delle funzioni esponenziali**
- **Derivate delle funzioni goniometriche**

"Non accontentarti di restare nel GRIGIO per paura
del NERO, ma punta dritto al BIANCO..
e tuffati dentro!
Entra nel vortice.. quindi, rallenta:
ritroverai tutti i COLORI
e farai splendere sempre la tua Vita!!"

REGOLA 7

$$\boxed{D \log_a x = \frac{1}{x \ln a}}$$

SIA $f(x) = \log_a x$

DOMINIO : $D =]0; +\infty)$

SIA $x_0 \in D$

CONSIDERIAMO IL RAPPORTO INCREMENTALE

$$f(x_0) = \log_a x_0$$

$$f(x_0 + h) = \log_a (x_0 + h)$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\log_a(x_0+h) - \log_a x_0}{h} = \frac{\log_a \frac{x_0+h}{x_0}}{h} =$$

$$= \frac{\log_a\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{h}$$

LIMITE NOTEVOLE

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}} \ *$$

LA DERIVATA DI $f(x) = \log_a x$ IN $x_0 \in D$ È

DIVIDENDO E MOLTIPLICANDO PER x_0

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}} \cdot x_0 =$$

$$\frac{1}{\ln a} \ *$$

$$= \frac{1}{x_0 \ln a}$$

E QUESTO È VERO $\forall x_0 \in D$, QUINDI $D \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$

REGOLA 8

$$\boxed{Da^x = a^x \ln a}$$

SIA $f(x) = a^x$

DOMINIO : $D = \mathbb{R}$

SIA $x_0 \in D$

CONSIDERIAMO IL RAPPORTO INCREMENTALE

$f(x_0) = a^{x_0}$

$f(x_0+h) = a^{x_0+h}$

$a^{n+m} = a^n \cdot a^m$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{a^{x_0+h} - a^{x_0}}{h} = \frac{a^{x_0} \cdot a^h - a^{x_0}}{h} =$$

$$= \frac{a^{x_0}(a^h - 1)}{h}$$

$$\boxed{\text{LIMITE NOTEVOLE} \quad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a} \; *$$

LA DERIVATA DI $f(x) = a^x$ IN $x_0 \in D$ È

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x_0}(a^h - 1)}{h} =$$

$\ln a \; *$

$$= a^{x_0} \ln a$$

E QUESTO È VERO $\forall x_0 \in D$, QUINDI $Da^x = a^x \ln a$

ESEMPI ED ESERCIZI

USANDO LA DEFINIZIONE DI DERIVATA, DETERMINARE LA DERIVATA DELLE SEGUENTI FUNZIONI NEL PUNTO DI ASCISSA x_0

a) $f(x) = \ln(2x+5)$ $\quad x_0 = -2$

b) $f(x) = 3^{x+1}$ $\quad x_0 = -1$

c) $f(x) = e^{x^2-1}$ $\quad x_0 = 1$

SOLUZIONI:

$f'(-2) = 2$

$f'(-1) = \ln 3$

$f'(1) = 2$

ESEMPIO SVOLTO

$f(x) = \log_3(x+2) \quad x_0 = -1$

RAPPORTO INCREMENTALE

$f(-1) = \log_3(-1+2) = \log_3 1 = 0$

$f(-1+h) = \log_3(-1+h+2) = \log_3(1+h)$

$$\frac{\Delta f(-1)}{\Delta x} = \frac{\log_3(1+h) - 0}{h} = \frac{\log_3(1+h)}{h}$$

LIMITE NOTEVOLE

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}}$$

QUINDI LA DERIVATA È:

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f(-1)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_3(1+h)}{h} = \frac{1}{\ln 3}$$

REGOLA 9

$$\boxed{D\sin x = \cos x}$$

SIA $f(x) = \sin x$

DOMINIO : $D = \mathbb{R}$ SIA $x_0 \in D$

CONSIDERIAMO IL

RAPPORTO INCREMENTALE

$f(x_0) = \sin x_0 \qquad f(x_0+h) = \sin(x_0+h)$

FORMULA DI PROSTAFERESI

$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} =$$

$$\overset{*}{=} \frac{2\cos\frac{x_0+h+x_0}{2}\sin\frac{\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0}}{2}}{h} = \frac{2\cos\frac{2x_0+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h}$$

LA DERIVATA DI $f(x)=\sin x$ IN $x_0 \in D$ È

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{2\underbrace{\cos\frac{2x_0+h}{2}}_{\to\cos x_0}\underbrace{\sin\frac{h}{2}}_{\to 0}}{\underbrace{h}_{\to 0}} =$$

LIMITE NOTEVOLE

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{h\to 0} \frac{2\cos x_0 \underbrace{\sin\frac{h}{2}}_{\to 1}}{\frac{h}{2}\cdot(2)} = \cos x_0$$

DIVIDO E MOLTIPLICO PER 2

E QUESTO È VERO $\forall x_0 \in D$, QUINDI $D\sin x = \cos x$

REGOLA 10

$$\boxed{D\cos x = -\sin x}$$

SIA $f(x)=\cos x$

DOMINIO : $D=\mathbb{R}$ SIA $x_0 \in D$

CONSIDERIAMO IL

RAPPORTO INCREMENTALE

$f(x_0) = \cos x_0 \qquad f(x_0+h) = \cos(x_0+h)$

FORMULA DI PROSTAFERESI

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\cos(x_0+h) - \cos x_0}{h} =$$

$$\overset{*}{=} \frac{-2 \sin \frac{x_0+h+x_0}{2} \sin \frac{\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0}}{2}}{h} = \frac{-2 \sin \frac{2x_0+h}{2} \sin \frac{h}{2}}{h}$$

LA DERIVATA DI $f(x)=\cos x$ IN $x_0 \in D$ È

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{-2 \underbrace{\sin \frac{2x_0+h}{2}}_{\to \sin x_0} \underbrace{\sin \frac{h}{2}}_{\to 0}}{\underbrace{h}_{\to 0}} =$$

LIMITE NOTEVOLE $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{h \to 0} \frac{-2 \sin x_0 \overbrace{\sin \frac{h}{2}}^{\to 1}}{\frac{h}{2} \cdot (2)} = -\sin x_0$$

DIVIDO E MOLTIPLICO PER 2

E QUESTO È VERO $\forall x_0 \in D$, QUINDI $\boxed{D\cos x = -\sin x}$

ESEMPI ED ESERCIZI

USANDO LA DEFINIZIONE DI DERIVATA, DETERMINARE LA DERIVATA DELLE SEGUENTI FUNZIONI NEL PUNTO DI ASCISSA x_0

a) $f(x) = \cos 3x \qquad x_0 = \frac{\pi}{2}$

b) $f(x) = 3\sin 4x \qquad x_0 = \frac{\pi}{3}$

c) $f(x) = 2\cos 4x \qquad x_0 = \frac{\pi}{2}$

SOLUZIONI:

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -6$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

ESEMPIO SVOLTO

$$f(x) = 5\sin 2x + 1 \qquad x_0 = \frac{\pi}{2}$$

RAPPORTO INCREMENTALE

ARCHI ASSOCIATI

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5\sin 2\cdot\frac{\pi}{2} + 1 = 5\sin\pi + 1 = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) = 5\sin 2\left(\frac{\pi}{2}+h\right) + 1 = 5\sin(\pi + 2h) + 1 = -5\sin 2h + 1$$

$$\frac{\Delta f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{-5\sin 2h \cancel{+1} \cancel{-1}}{h} = \frac{-5\sin 2h}{h}$$

LIMITE NOTEVOLE

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

QUINDI LA DERIVATA È:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{-5\overbrace{\sin 2h}^{1}}{2h}\cdot\frac{1}{2} = -10$$

FORMULE DI PROSTAFERESI

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$