Color est e pluribus unus

corso di Matematica

prof. Claudio Desiderio

Modulo 1: derivate

Funzioni reali di variabile reale

Unita' 1 : introduzione

- **Applicazioni in fisica:** velocità e accelerazione
- **Applicazioni in analisi:** tangente e monotonia
- **Regole di derivazione di funzioni semplici**

"Non accontentarti di restare nel GRIGIO per paura

del NERO, ma punta dritto al BIANCO..

e tuffati dentro!

Entra nel vortice.. quindi, rallenta:

ritroverai tutti i COLORI

e farai splendere sempre la tua Vita!!"

DERIVATE

A COSA SERVONO?

HANNO TANTISSIME APPLICAZIONI !!!
E SONO FACILISSIME !!!

IN FISICA, AD ESEMPIO

SE $s = s(t)$ E' L'EQUAZIONE ORARIA DEL MOTO

ALLORA: $v = s'(t) = \dfrac{ds}{dt}$ DERIVATA DELLO SPAZIO RISPETTO AL TEMPO

$a = s''(t) = v'(t) = \dfrac{dv}{dt}$ DERIVATA DELLA VELOCITÀ RISPETTO AL TEMPO

ED ANCORA ... $i(t) = \dfrac{dq}{dt}$

INTENSITÀ DI CORRENTE

DERIVATA DELLA CARICA ELETTRICA

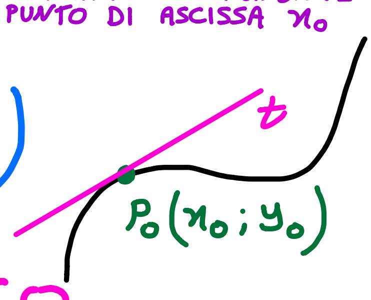
RISPETTO AL TEMPO

NELLO STUDIO DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

- PER LA RICERCA DELLA TANGENTE AL GRAFICO DELLA FUNZIONE $y = f(x)$ NEL PUNTO DI ASCISSA x_0

$m_t = f'(x_0)$ IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA TANGENTE È UGUALE ALLA DERIVATA DELLA FUNZIONE NEL PUNTO DI ASCISSA x_0

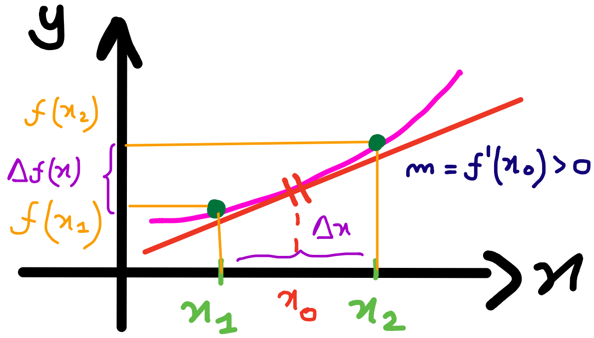
$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$



SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLA DERIVATA

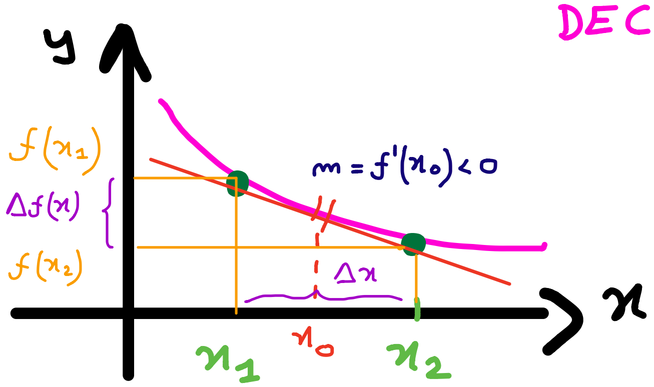
- NELLO STUDIO DELLA MONOTONIA DI UNA FUNZIONE, E PRECISAMENTE ATTRAVERSO LO STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA:

SE $f'(x) > 0$ IN $]a;b[\Rightarrow$ IL GRAFICO DI $f(x)$ È CRESCENTE IN $]a;b[$



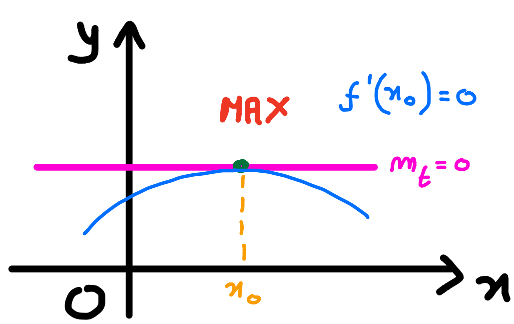
$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

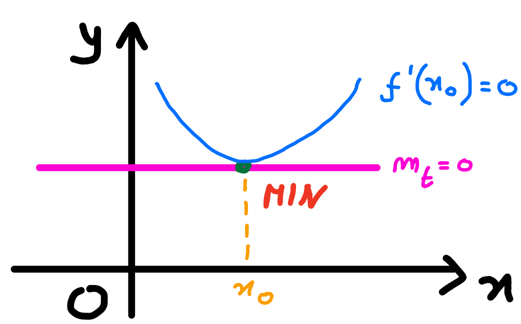
SE $f'(x) < 0$ IN $]a;b[\Rightarrow$ IL GRAFICO DI $f(x)$ È DECRESCENTE IN $]a;b[$



$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

- NELLA RICERCA DEI MASSIMI E MINIMI RELATIVI DI UNA FUNZIONE

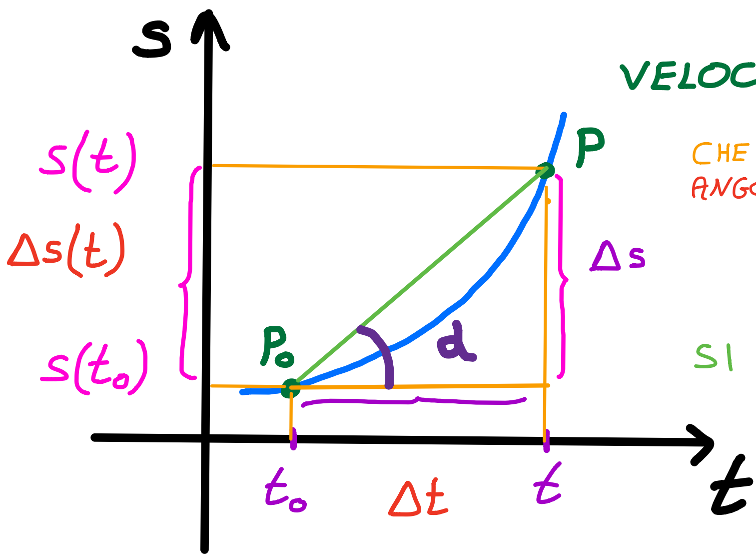




COME SI DEFINISCE LA DERIVATA?

PROVIAMO A CAPIRLO RIPRENDENDO I CONCETTI DI VELOCITÀ MEDIA E VELOCITÀ ISTANTANEA A PARTIRE DALL'EQUAZIONE ORARIA $s = s(t)$

RAPPRESENTANDO NEL DIAGRAMMA SPAZIO-TEMPO L'EQUAZIONE $s = s(t)$ E CONSIDERANDO LA POSIZIONE OCCUPATA NELL'ISTANTE t_0 E t



VELOCITÀ MEDIA: $v_M = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

CHE RAPPRESENTA IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA P_0P

IL RAPPORTO $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ SI CHIAMA: RAPPORTO INCREMENTALE

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \tan \alpha$$

LA VELOCITÀ ISTANTANEA NELL'ISTANTE t_0 SI OTTIENE FACENDO TENDERE $\Delta t \to 0$

OVVERO:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t) - s(t_0)}{\Delta t} = s'(t_0)$$

LIMITE DEL RAPPORTO INCREMENTALE

DEFINIZIONE DI DERIVATA DI $s(t)$ IN t_0

DEFINIZIONE

DI DERIVATA DI UNA FUNZIONE $y=f(x)$ NEL SUO PUNTO DI ASCISSA x_0

SIA $y=f(x)$ UNA FUNZIONE CONTINUA IN x_0

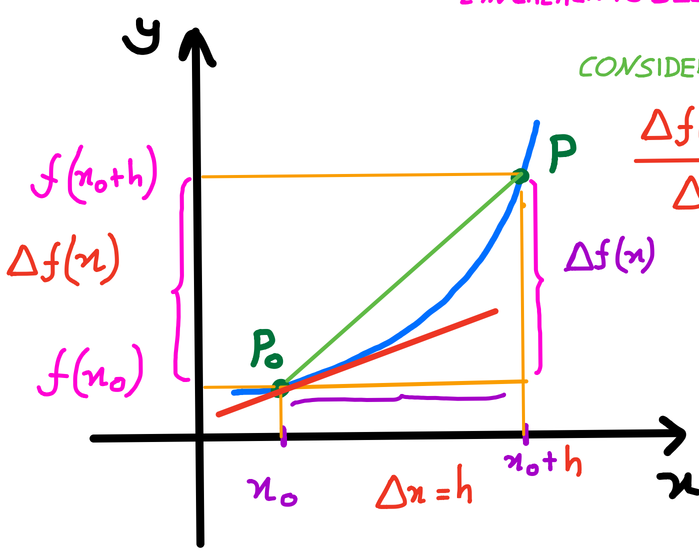
RAPPRESENTIAMO NEL PIANO CARTESIANO LA FUNZIONE $y=f(x)$ E CONSIDERIAMO IL PUNTO P_0 DI ASCISSA x_0 E ORDINATA $f(x_0)$;

SUPPONIAMO ADESSO DI INCREMENTARE x_0 DI UN VALORE h,

IN CORRISPONDENZA DI x_0+h TROVIAMO IL PUNTO P DI ORDINATA $f(x_0+h)$

INDICATO CON $\Delta f(x) = f(x_0+h) - f(x_0)$

L'INCREMENTO DELLA VARIABILE DIPENDENTE



CONSIDERIAMO IL RAPPORTO INCREMENTALE

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

CHE RAPPRESENTA IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA P_0P

(DALLA FORMULA DEL COEFFICIENTE ANGOLARE DI UNA RETTA PER 2 PUNTI $P_1(x_1;y_1)$ $P_2(x_2;y_2)$ $m_{P_1P_2} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$)

FACENDO TENDERE $\Delta x \to 0$ LA RETTA SECANTE P_0P TENDE ALLA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI $f(x)$ IN x_0

EBBENE, CHIAMEREMO DERIVATA DI $f(x)$ NEL SUO PUNTO DI ASCISSA x_0 IL LIMITE, SE ESISTE, DEL RAPPORTO INCREMENTALE:

$$f'(x_0) \overset{\text{DEF.}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

CHE RAPPRESENTA IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI $f(x)$ IN x_0

MA NON È COSÌ DIFFICILE COME SEMBRA!

IN REALTÀ, UTILIZZANDO LA DEFINIZIONE, SI DIMOSTRANO UNA VOLTA PER TUTTE, LE **REGOLE DI DERIVAZIONE** CHE RENDONO ESTREMAMENTE SEMPLICE IL CALCOLO DI UNA DERIVATA

RICHIAMIAMO SUBITO LE

REGOLE DI DERIVAZIONE "SEMPLICI"

PREMESSO CHE INDICHIAMO LA DERIVATA DI UNA FUNZIONE CON IL SIMBOLO $Df(x) = f'(x)$

$$DK = 0$$
$$Dx = 1$$
$$Dx^n = n x^{n-1}$$

EX $D5 = 0$ $\quad D\sqrt{5} = 0$

$Dx^2 = 2x$

$Dx^3 = 3x^2$

$$D\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$$
$$D\ln x = \frac{1}{x}$$
$$Da^x = a^x \ln a$$
$$De^x = e^x$$

EX

$D\log_5 x = \frac{1}{x\ln 5}$

$D5^x = 5\ln 5$

$$D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$D\sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$$

$$D\sin x = \cos x$$
$$D\cos x = -\sin x$$

EX $D\sqrt[4]{x^3} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x^{4-3}}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

QUESTE "SEMPLICI" REGOLE SI POSSONO METTERE INSIEME CON LE OPERAZIONI ; VEDIAMO ADESSO SOLO LE 2 OPERAZIONI PIÙ SEMPLICI

$$\boxed{Df(x) = f'(x) = y'}$$

SOMMA :

$$\boxed{D\big(f(x)+g(x)\big) = \underbrace{f'(x)}_{Df(x)} + \underbrace{g'(x)}_{Dg(x)}}$$

ESEMPI

$$\boxed{\begin{array}{l} DK = 0 \\ Dx = 1 \\ Dx^{m} = m x^{m-1} \end{array}}$$

1. $f(x) = x^2 + x + 1$

$f'(x) = Dx^2 + Dx + D1 = 2x + 1 + 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} D\sin x = \cos x \\ D\cos x = -\sin x \end{array}}$$

2. $f(x) = \sin x + \cos x + \sqrt{2}$

$f'(x) = D\sin x + D\cos x + D\sqrt{2} = \cos x - \sin x + 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} D\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a} \\ D\ln x = \frac{1}{x} \\ Da^x = a^x \ln a \\ De^x = e^x \end{array}}$$

3. $f(x) = \ln x + 2^x + 3$

$f'(x) = D\ln x + D2^x + D3 = \frac{1}{x} + 2^x \ln 2 + 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ D\sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}} \end{array}}$$

4. $f(x) = \sqrt{x} + \log_2 x + \sqrt{2} + \log_2 3$

$f'(x) = D\sqrt{x} + D\log_2 x + D\sqrt{2} + D\log_2 3 = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x\ln 2} + 0$

NELLE PROSSIME LEZIONI METTEREMO IN PRATICA E APPROFONDIREMO

DERIVATA DI UNA COSTANTE PER UNA FUNZIONE

$$\boxed{D\,K \cdot f(x) = K \cdot f'(x)}$$

$DK = 0$
$Dx = 1$
$Dx^n = n x^{n-1}$

ESEMPI

1. $f(x) = 3x \qquad f'(x) = D\,3 \cdot x = 3 \cdot Dx = 3 \cdot 1 = 3$

2. $f(x) = 4x^2 + 5x + 1$

$$f'(x) = D\,4 \cdot x^2 + D\,5 \cdot x + D\,1 = 4 \cdot 2x + 5 \cdot 1 + 0 =$$
$$= 8x + 5$$

$D \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$
$D \ln x = \frac{1}{x}$
$D a^x = a^x \ln a$
$D e^x = e^x$

3. $f(x) = 2 \ln x - 3$

$$f'(x) = D\,2 \cdot \ln x - D\,3 = 2 \cdot \frac{1}{x} - 0 = \frac{2}{x}$$

4. $f(x) = 5e^x + 1$

$$f'(x) = 5e^x$$

$D \sin x = \cos x$
$D \cos x = -\sin x$

5. $f(x) = \sqrt{3} \sin x - 2\cos x + 1$

$$f'(x) = D\sqrt{3} \cdot \sin x - D\,2 \cdot \cos x + D\,1 = \sqrt{3} \cos x + 2 \sin x$$

6. $f(x) = 3\sqrt{x} - 4x + 2$

$$f'(x) = D\,3\sqrt{x} - D\,4 \cdot x + D\,2 =$$
$$= 3 \frac{1}{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 1 + 0$$

$D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$D\sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$

NELLE PROSSIME LEZIONI METTEREMO IN PRATICA E APPROFONDIREMO