Color est e pluribus unus

corso di Matematica

prof. Claudio Desiderio

Modulo3: teoremi sulle funzioni derivabili
Funzioni reali di variabile reale

Unita' 1:
Enunciati, significati geometrici e dimostrazioni

- Teorema di Fermat
- Teorema di Rolle
- Teorema di Cauchy
- Teorema Di Lagrange

"Non accontentarti di restare nel GRIGIO per paura
del NERO, ma punta dritto al BIANCO..
e tuffati dentro!
Entra nel vortice.. quindi, rallenta:
ritroverai tutti i COLORI
e farai splendere sempre la tua Vita!!"

TEOREMA DI FERMAT

IPOTESI

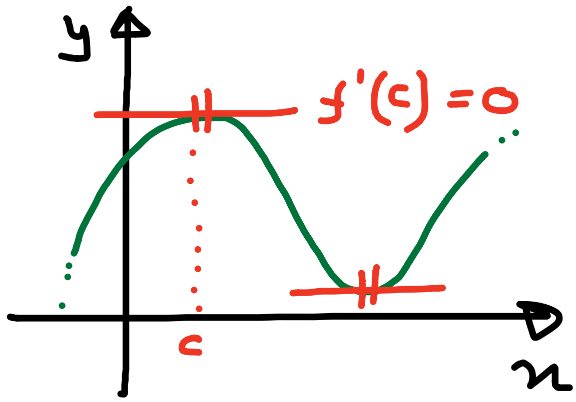
$f: X \to \mathbb{R}$

$x = c$ ESTREMO RELATIVO (MASSIMO O MINIMO)

SE $\exists f'(c)$

ALLORA (TESI) $f'(c) = 0$

GRAFICAMENTE È SEMPLICE



DIMOSTRAZIONE

SUPPONIAMO CHE c SIA UN PUNTO DI MINIMO REL.

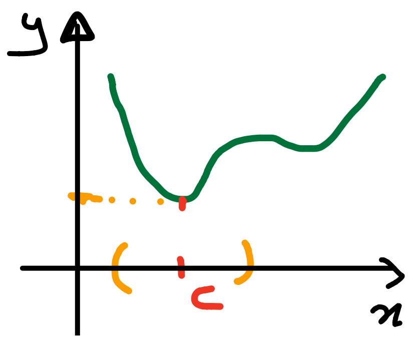
$\Rightarrow \exists I(c) : f(c) \leq f(x) \ \forall x \in I(c)$

POSTO $x = c + h$ TALE CHE $c + h \in I(c)$

SI AVRÀ:

$f(c) \leq f(c+h) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(c+h) - f(c) \geq 0$



x

L'IDEA È QUELLA DI CREARE IL RAPPORTO INCREMENTALE

INFATTI:

SE $h<0$ SI AVRÀ: $\dfrac{\overbrace{f(c+h)-f(c)}^{+}}{\underbrace{h}_{-}} \leq 0$

SE $h>0$ SI AVRÀ: $\dfrac{\overbrace{f(c+h)-f(c)}^{+}}{\underbrace{h}_{+}} \geq 0$

PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO, E UTILIZZANDO LE DEFINIZIONI DI DERIVATA DESTRA E SINISTRA SI AVRÀ:

$$\left.\begin{aligned} & f'(c^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0 \\ & f'(c^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0 \\ & \exists f'(c) = f'(c^-) = f'(c^+) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(c)=0$$

TEOREMA DI ROLLE

IPOTESI

SIA $f : [a;b] \to \mathbb{R}$

CONTINUA IN $[a;b]$

DERIVABILE IN $]a;b[$

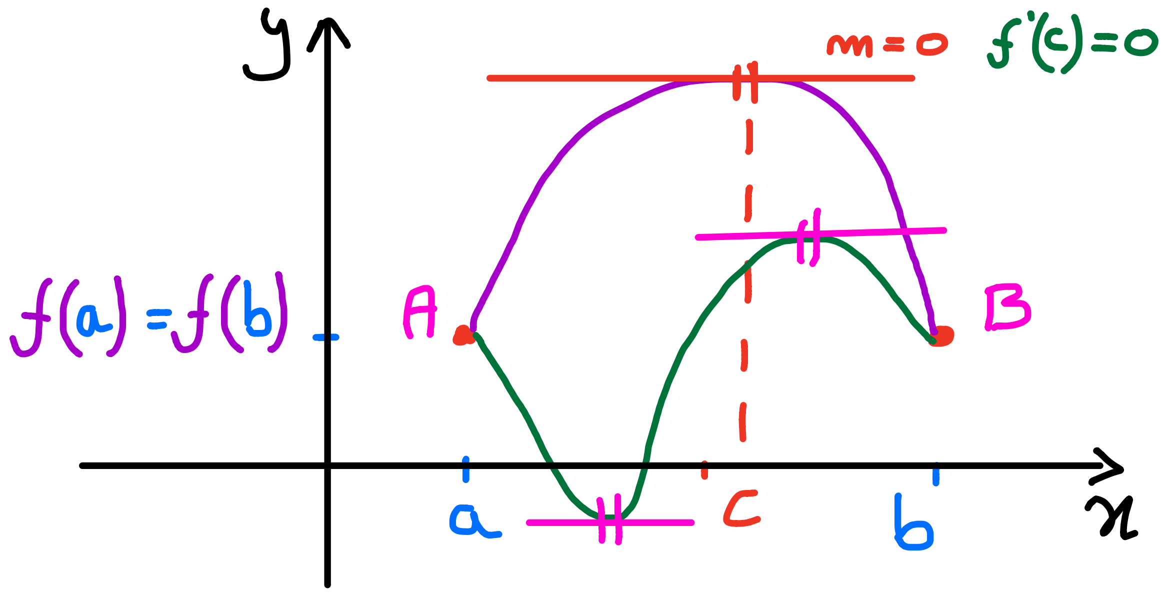
$f(a) = f(b)$

{f DEFINITA IN..}
{f CONTINUA NELL' INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO..}

TESI

$\exists c \in]a;b[: f'(c) = 0$

SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL TEOREMA DI ROLLE



DIMOSTRAZIONE

ESSENDO $f(x)$ CONTINUA IN $[a;b]$
PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS
LA FUNZIONE È DOTATA DI MASSIMO
E MINIMO ASSOLUTI
OVVERO :

$$\exists c \in [a;b] : f(c) = \min f(x) = m$$
$$\exists d \in [a;b] : f(d) = \max f(x) = M$$

PER DEFINIZIONE DI MASSIMO E MINIMO :

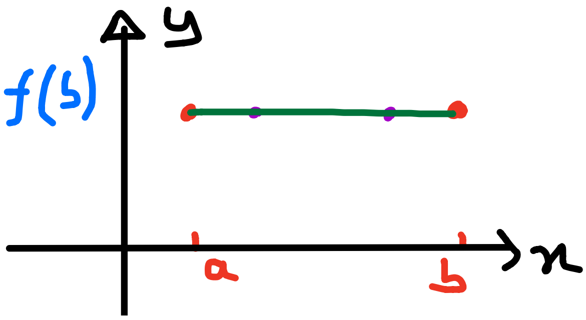
$$m = f(c) \leq f(d) = M$$

SI POSSONO DISTINGUERE 2 CASI:

PRIMO CASO : $m = M$

SE IL MINIMO E IL MASSIMO
COINCIDONO ALLORA LA FUNZIONE
È COSTANTE

$$m = M = f(a) = f(b)$$



I

SE LA FUNZIONE È COSTANTE

$$f(x) = K \quad \forall x \in [a;b]$$

ALLORA : $f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a;b]$

IN PARTICOLARE $\exists c \in]a;b[: f'(c) = 0$

SECONDO CASO : $m < M$

ALMENO UNO DEI 2 TRA MINIMO E MASSIMO È INTERNO ALL'INTERVALLO $[a;b]$ (VISTO CHE $f(a) = f(b)$)

SUPPONIAMO CHE SIA $c \in]a;b[$ CON $f(c) = \min f(x)$

POICHÈ LA FUNZIONE È DERIVABILE IN $]a;b[$:

$$\left.\begin{array}{l} \exists f'(c) \\ x = c \text{ ESTREMO RELATIVO} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{FERMAT}$$

$f'(c) = 0$ TESI!

TEOREMA DI CAUCHY

IPOTESI
(QUESTA VOLTA SI CONSIDERANO 2 FUNZIONI)

SIANO $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} 1.\quad f, g \text{ CONTINUE IN } [a,b] \\ 2.\quad f, g \text{ DERIVABILI IN }]a;b[\\ 3.\quad g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in]a;b[\\ 4.\quad g(a) \neq g(b) \end{array}\right\} hp$$

$\Rightarrow$ TESI

$$\exists c \in]a;b[: \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

(NON HA UN SIGNIFICATO GEOMETRICO)
NOI LO UTILIZZEREREMO PER DIMOSTRARE I TEOREMI DI LAGRANGE E DE HÔPITAL

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI CAUCHY

SI CONSIDERA UNA FUNZIONE AUSILIARIA

$$\varphi(x) = f(x) - K\ g(x)$$

SI DETERMINA IL VALORE DI K
PER CUI LA FUNZIONE VERIFICA
LE IPOTESI DEL TEOREMA DI ROLLE

$\varphi(x)$ È CONTINUA IN $[a;b]$
E DERIVABILE IN $]a;b[$
PERCHÈ LO SONO PER IPOTESI f E g

CONSIDERIAMO ADESSO:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(a) = f(a) - K g(a) \\ \varphi(b) = f(b) - K g(b) \end{array}\right\} \text{IMPONIAMO } \varphi(a) = \varphi(b)$$

$$f(a) - K g(a) = f(b) - K g(b)$$

$$K g(b) - K g(a) = f(b) - f(a) \Rightarrow$$

$$K = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

SOSTITUENDO A K IL VALORE TROVATO
POSSIAMO OSSERVARE CHE:

LA FUNZIONE :

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$$

VERIFICA TUTTE LE IPOTESI DEL TEOREMA DI ROLLE

QUINDI :

$$\exists c \in]a;b[: \quad \varphi'(c) = 0$$

TROVIAMO :

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x)$$

SI AVRÀ :

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0 \quad \Longrightarrow$$

E DIVIDENDO PER $g'(c) \neq 0$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \qquad \text{TESI}$$

TEOREMA DI LAGRANGE

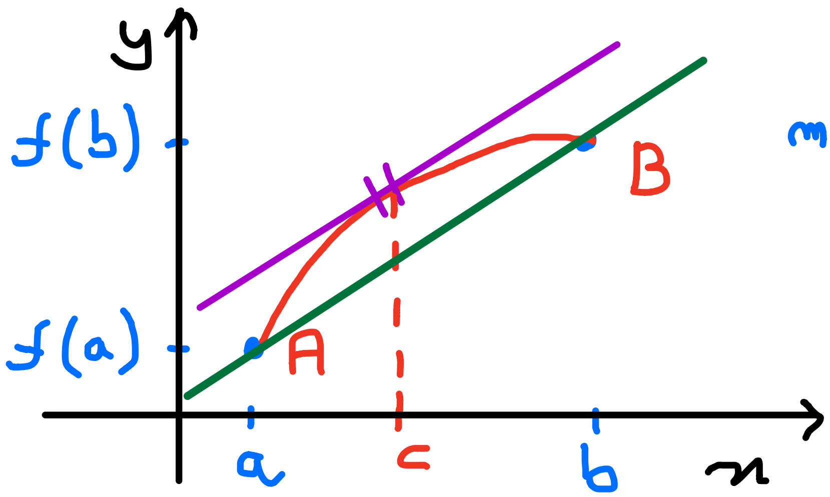
IPOTESI

$$\left.\begin{array}{l} f:[a;b]\to\mathbb{R} \\ f \text{ CONTINUA IN } [a;b] \\ f \text{ DERIVABILE IN }]a;b[\\ \\ f(a)\neq f(b) \end{array}\right\} hp$$

TESI

$$\exists c\in]a;b[: \; f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO



$$m_{AB}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

∃ ALMENO UN PUNTO DI ASCISSA c IN CUI LA RETTA TANGENTE È PARALLELA ALLA SECANTE AB

DIMOSTRAZIONE

MOLTO SEMPLICE!

BASTA APPLICARE IL TEOREMA DI CAUCHY CONSIDERANDO COME FUNZIONE $g(x)$ LA FUNZIONE:

$$g(x) = x$$

f E g SONO ENTRAMBE DEFINITE IN $[a, b]$

f PER IPOTESI E $g(x) = x$ PERCHÈ DEFINITA IN $\mathbb{R}$

ANALOGAMENTE

f, g CONTINUE IN $[a; b]$

f, g DERIVABILI IN $]a; b[$

INFATTI:

$$g'(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

DI CONSEGUENZA: $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a; b[$

E INFINE:

$$\left.\begin{array}{l} g(a) = a \\ g(b) = b \end{array}\right\} \quad g(a) \neq g(b)$$

LE 2 FUNZIONI VERIFICANO TUTTE LE IPOTESI DEL TEOREMA DI CAUCHY QUINDI

$\exists c \in]a;b[:\quad \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

ED ESSENDO: $g'(c)=1$

$g(b)=b$

$g(a)=a$

SI HA LA NOSTRA TESI:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$