Color est e pluribus unus

corso di Matematica

prof. Claudio Desiderio

Modulo2: teoremi sulle funzioni derivabili
Funzioni reali di variabile reale

Unita' 2bis :
Altri Esercizi

- **Teorema di Rolle**
- **Teorema Di Lagrange**
- **Teorema di Cauchy**

"Non accontentarti di restare nel GRIGIO per paura
del NERO, ma punta dritto al BIANCO..
e tuffati dentro!
Entra nel vortice.. quindi, rallenta:
ritroverai tutti i COLORI
e farai splendere sempre la tua Vita!!"

A. DIRE SE LA FUNZIONE $f(x)$ NELL' INTERVALLO $[a;b]$ SODDISFA LE IPOTESI DEL TEOREMA DI ROLLE O LAGRANGE E IN CASO AFFERMATIVO, CALCOLARE LE ASCISSE DEI PUNTI CHE VERIFICANO IL TEOREMA

1 $f(x) = \ln(2x-1)$ $[1;2]$

2 $f(x) = \frac{2x}{1-x}$ $[-5;0]$

3 $f(x) = \sqrt{2x+1}$ $[0;4]$

4 $f(x) = \sqrt{|x|} - 3$ $[-1;1]$

5 $f(x) = \sqrt{|x|} - 3$ $[0;4]$

B

5 DATA LA FUNZIONE $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - ax + a & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

DETERMINARE IL VALORE DI a IN MODO CHE NELL' INTERVALLO $[0;2]$ SIA APPLICABILE IL TEOREMA DI LAGRANGE E CALCOLARE LE ASCISSE DEI PUNTI CHE VERIFICANO IL TEOREMA

C

DIRE SE LE FUNZIONI $f(x)$ E $g(x)$ NELL' INTERVALLO $[a;b]$ SODDISFANO LE IPOTESI DEL TEOREMA DI CAUCHY E IN CASO AFFERMATIVO, CALCOLARE LE ASCISSE DEI PUNTI CHE VERIFICANO IL TEOREMA

6. $f(x) = 3x^2 - 1$ $g(x) = 4x - 3$ $[0;1]$

7. $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $g(x) = 3 + x$ $[2;5]$

8. $f(x) = |1 - \ln x|$ $g(x) = \ln(x-1)$ $[1;\frac{e}{2}]$

$f(x) = |1 - \ln x|$ $g(x) = \ln(x-1)$ $[\frac{e}{2};e]$

1. DIRE SE LA FUNZIONE $f(x) = \ln(2x-1)$ NELL' INTERVALLO $[1;2]$ SODDISFA LE IPOTESI DEL TEOREMA DI ROLLE O LAGRANGE E IN CASO AFFERMATIVO, CALCOLARE LE ASCISSE DEI PUNTI CHE VERIFICANO IL TEOREMA

CONTINUA IN $[1;2]$? SI PERCHÈ C.E. $f(x)$: $x > \frac{1}{2}$

DERIVABILE IN $]1;2[$? SI PERCHÈ

$$f'(x) = \frac{2}{2x-1} \quad \forall x > \frac{1}{2}$$

$f(1) = \ln(2\cdot 1 - 1) = \ln(1) = 0$

$f(2) = \ln(2\cdot 2 - 1) = \ln(3)$ $\qquad f(1) \neq f(2)$

$\Longrightarrow$ PER IL TEOREMA DI LAGRANGE

$$\exists c \in]1;2[\quad f'(c) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{\ln(3)-0}{1}$$

$$\frac{2}{2c-1} = \ln(3) \underset{\text{PRODOTTO "INCROCIO"}}{\Longrightarrow} \frac{2}{\ln(3)} = 2c-1$$

$$2c = \frac{2}{\ln(3)} + 1 \underset{\text{DIVIDENDO PER 2}}{\Longrightarrow} c = \frac{1}{\ln(3)} + \frac{1}{2}$$

2. DIRE SE LA FUNZIONE $f(x) = \frac{2x}{1-x}$ NELL' INTERVALLO $[-5;0]$ SODDISFA LE IPOTESI DEL TEOREMA DI ROLLE O LAGRANGE E IN CASO AFFERMATIVO, CALCOLARE LE ASCISSE DEI PUNTI CHE VERIFICANO IL TEOREMA

CONTINUA IN $[-5;0]$? SI PERCHÈ C.E. $f(x)$: $x \neq 1$

DERIVABILE IN $]-5;0[$? SI PERCHÈ

$$f'(x) = \frac{2(1-x) - 2x \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{2 \cancel{-2x} \cancel{+2x}}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2} \quad \forall x \neq 1$$

$$f(-5) = \frac{2(-5)}{1-(-5)} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$$

$$f(0) = \frac{2(0)}{1-(0)} = 0 \qquad f(-5) \neq f(0)$$

$\Rightarrow$ PER IL TEOREMA DI LAGRANGE

$$\exists\, c \in]-5;0[\quad f'(c) = \frac{f(0) - f(-5)}{0-(-5)} = \frac{0 + \cancel{5}/3}{+\cancel{5}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{(1-c)^2} = \frac{1}{3} \xRightarrow{\text{PRODOTTO "INCROCIO"}} 6 = (c-1)^2$$

$$\Rightarrow c - 1 = \pm\sqrt{6} \Rightarrow c = \pm\sqrt{6} + 1$$

$c_1 = +\sqrt{6} + 1 \notin]-5;0[$

$c_2 = -\sqrt{6} + 1 \in]-5;0[$

3. DIRE SE LA FUNZIONE $f(x)=\sqrt{2x+1}$ NELL' INTERVALLO $[0;4]$ SODDISFA LE IPOTESI DEL TEOREMA DI ROLLE O LAGRANGE E IN CASO AFFERMATIVO, CALCOLARE LE ASCISSE DEI PUNTI CHE VERIFICANO IL TEOREMA

CONTINUA IN $[0;4]$? SÌ PERCHÈ C.E. $f(x): x \geq -\frac{1}{2}$

DERIVABILE IN $]0;4[$? SÌ PERCHÈ

$$f'(x) = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \qquad \forall x > -\frac{1}{2}$$

$$f(4) = \sqrt{2(4)+1} = 3$$

$$f(0) = \sqrt{2(0)+1} = 1 \qquad f(4) \neq f(0)$$

$\Longrightarrow$ PER IL TEOREMA DI LAGRANGE

$$\exists c \in]0;4[\qquad f'(c) = \frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2c+1}} = \frac{1}{2} \quad \underset{\text{PRODOTTO "INCROCIO"}}{\Longrightarrow} \quad 2 = \sqrt{2c+1}$$

$$\Longrightarrow 2c+1 = 4 \quad \Longrightarrow c = \frac{3}{2} \in]0;4[$$

4. DIRE SE LA FUNZIONE $f(x)=\sqrt{|x|}-3$ NELL' INTERVALLO $[-1;1]$ SODDISFA LE IPOTESI DEL TEOREMA DI ROLLE O LAGRANGE E IN CASO AFFERMATIVO, CALCOLARE LE ASCISSE DEI PUNTI CHE VERIFICANO IL TEOREMA

CONTINUA IN $[-1;1]$? SI PERCHÉ C.E. $f(x): \forall x \in \mathbb{R}$

DERIVABILE IN $]-1;1[$?

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}-3 & \text{PER } x\geq 0\\ \sqrt{-x}-3 & \text{PER } x<0\end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{PER } x>0 \quad (x\neq 0)\\ \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}} & \text{PER } x<0\end{cases}$$

$\nexists f'(0) \qquad 0 \in \,]-1;1[$

$f(x)$ NON DERIVABILE IN $]-1;1[$

$\Rightarrow$ NON SONO VERIFICATE LE IPOTESI DEL TEOREMA DI ROLLE O LAGRANGE

4b. DIRE SE LA FUNZIONE $f(x)=\sqrt{|x|}-3$ NELL' INTERVALLO $[0;4]$ SODDISFA LE IPOTESI DEL TEOREMA DI ROLLE O LAGRANGE E IN CASO AFFERMATIVO, CALCOLARE LE ASCISSE DEI PUNTI CHE VERIFICANO IL TEOREMA

CONTINUA IN $[0;4]$? SI PERCHÈ C.E. $f(x): \forall x \in \mathbb{R}$

DERIVABILE IN $]0;4[$?

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}-3 & \text{PER } x\geq 0\\ \sqrt{-x}-3 & \text{PER } x<0\end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{PER } x>0 \quad (x\neq 0)\\ \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}} & \text{PER } x<0\end{cases}$$

$\nexists f'(0) \Rightarrow f(x)$ DERIVABILE IN $]0;4[$ $\quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(0)=\sqrt{0}-3=-3 \qquad f(4)=\sqrt{4}-3=-1 \qquad f(4)\neq f(0)$

$\Rightarrow$ PER IL TEOREMA DI LAGRANGE

$$\exists\, c \in\,]0;4[\qquad f'(c)=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{c}}=\frac{1}{\cancel{2}} \quad \xRightarrow[\text{"INCROCIO"}]{\text{PRODOTTO}} \quad 1=\sqrt{c}$$

$\Rightarrow \quad c=1 \in\,]0;4[$

5 DATA LA FUNZIONE

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x\le 1 \\ x^2-ax+a & 1<x\le 2 \end{cases}$$

DETERMINARE IL VALORE DI a IN MODO CHE NELL' INTERVALLO $[0;2]$ SIA APPLICABILE IL TEOREMA DI LAGRANGE E CALCOLARE LE ASCISSE DEI PUNTI CHE VERIFICANO IL TEOREMA

CONTINUA IN $[0;2]$?

IMPONIAMO LA CONTINUITÀ IN $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+}(x^2-ax+a) = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

CONTINUA IN $x=1$ $\forall a\in\mathbb{R}$

DERIVABILE IN $]0;2[$?

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & 0<x<1 \\ 2x-a & 1<x<2 \end{cases}$$

IMPONIAMO LA DERIVABILITÀ IN $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} f'(x)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 1^-} 2x = 2 \\ &\lim_{x \to 1^+} 2x - a = 2 - a \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &2 - a = 2 \\ &a = 0 \end{aligned}$$

QUINDI LA NOSTRA FUNZIONE È: $f(x) = x^2$

$$f'(x) = 2x$$

$f(0) = 0 \qquad f(2) = 4 \qquad f(0) \neq f(2)$

$\Longrightarrow$ PER IL TEOREMA DI LAGRANGE

$$\exists c \in]0;2[\quad f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 - 0}{2} = 2$$

$$2c = 2 \quad \Rightarrow \quad c = 1 \in]0;2[$$

5b DATA LA FUNZIONE

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & 0\le x\le 1 \\ x^2-ax+a & 1<x\le 2 \end{cases}$$

DETERMINARE IL VALORE DI a IN MODO CHE NELL' INTERVALLO $[0;2]$ SIA APPLICABILE IL TEOREMA DI LAGRANGE E CALCOLARE LE ASCISSE DEI PUNTI CHE VERIFICANO IL TEOREMA

CONTINUA IN $[0;2]$?

IMPONIAMO LA CONTINUITÀ IN $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^3=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-ax+a)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

CONTINUA IN $x=1$ $\forall a\in\mathbb{R}$

DERIVABILE IN $]0;2[$?

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & 0<x<1 \\ 2x-a & 1<x<2 \end{cases}$$

IMPONIAMO LA DERIVABILITÀ IN $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} 3x^2 = 3 \\ \lim_{x\to 1^+} 2x - a = 2 - a \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2-a=3 \\ a=-1 \end{array}$$

QUINDI LA NOSTRA FUNZIONE È:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 + x - 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

$4+2-1$

$$f(0) = 0 \qquad f(2) = 5 \qquad f(0) \ne f(2)$$

E LA DERIVATA:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 < x < 1 \\ 2x+1 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ PER IL TEOREMA DI LAGRANGE

$$\exists c \in]0;2[\quad f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{5-0}{2} = \frac{5}{2}$$

CHI È $f'(c)$?

BISOGNA DISTINGUERE 2 CASI:

1° CASO:

$0<x<1$ $\quad f'(c)=3c^2=\frac{5}{2} \implies c^2=\frac{5}{6}$

$$\implies c=\pm\sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$\implies c=+\sqrt{\frac{5}{6}} \in \left]0;1\right[$$

2° CASO:

$1<x<2$ $\quad f'(c)=2c+1=\frac{5}{2} \implies 2c=\frac{5}{2}-1$

$$\implies 2c=\frac{3}{2} \implies c=\frac{3}{4}$$

$$\implies \frac{3}{4} \notin \left]1;2\right[$$

CONCLUDENDO: $c=+\sqrt{\frac{5}{6}}$

6. DIRE SE LE FUNZIONI $f(x)=3x^2-1$ $g(x)=4x-3$ NELL' INTERVALLO $[0;1]$ SODDISFANO LE IPOTESI DEL TEOREMA DI CAUCHY E IN CASO AFFERMATIVO, CALCOLARE LE ASCISSE DEI PUNTI CHE VERIFICANO IL TEOREMA

CONTINUE IN $[0;1]$? SI PERCHÈ

C.E. $f(x)$: $\forall x \in \mathbb{R}$

C.E. $g(x)$: $\forall x \in \mathbb{R}$

DERIVABILI IN $]0;1[$?

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=6x \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ g'(x)=4 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{ IN PARTICOLARE IN }]0;1[$$

$g(x)=4x-3$

$f(x)=3x^2-1$

$$\left.\begin{array}{l} g(0)=-3 \\ g(1)=4-3=1 \end{array}\right\} \quad g(0)\neq g(1)$$

$f(1)=3\cdot 1-1=2$

$f(0)=3\cdot 0-1=-1$

$\Rightarrow$ PER IL TEOREMA DI CAUCHY

$$\exists c \in]0;1[\qquad \frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)} \Rightarrow$$

$$\frac{\overset{3}{\cancel{6}}x}{\underset{2}{\cancel{4}}}=\frac{2-(-1)}{1-(-3)} \Rightarrow \frac{\overset{1}{\cancel{3}}x}{\underset{1}{\cancel{2}}}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{4}}}$$

$$\Rightarrow c=\frac{1}{2}\in]0;1[$$

7. DIRE SE LE FUNZIONI $f(x)=\frac{1}{x-1}$ $g(x)=3+x$ NELL' INTERVALLO $[2;5]$ SODDISFANO LE IPOTESI DEL TEOREMA DI CAUCHY E IN CASO AFFERMATIVO, CALCOLARE LE ASCISSE DEI PUNTI CHE VERIFICANO IL TEOREMA

COMPLETALO TU...

CONTINUE IN $[2;5]$? SI PERCHÈ

C.E. $f(x)$:

C.E. $g(x)$:

DERIVABILI IN $]2;5[$?

$f'(x)=$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$g'(x)=$ $\forall x \in \mathbb{R}$

IN PARTICOLARE IN] [

$g(x)=$

$f(x)=$

$g(\ )=$

$g(\ )=$

$\Rightarrow$ PER IL TEOREMA DI CAUCHY

$\exists c \in]2;5[$ $\quad \dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(\ )-f(\ )}{g(\ )-g(\ )}$ $\Rightarrow$

$c=3$

8. DIRE SE LE FUNZIONI $f(x)=|1-\ln x|$ $g(x)=\ln(x-1)$ NELL' INTERVALLO $\left[1;\frac{e}{2}\right]$ SODDISFANO LE IPOTESI DEL TEOREMA DI CAUCHY E IN CASO AFFERMATIVO, CALCOLARE LE ASCISSE DEI PUNTI CHE VERIFICANO IL TEOREMA

CONTINUE IN $\left[1;\frac{e}{2}\right]$? NO PERCHÈ

C.E. $f(x)$: $x>0$

C.E. $g(x)$: $x>1$ $g(x)$ NON È CONTINUA IN $x=1$

IN QUALE POSSIBILE INTERVALLO È VERIFICATO?

LA FUNZIONE $f(x)$, PER LA PRESENZA DEL VALORE ASSOLUTO, POTREBE NON ESSERE DERIVABILE NEI PUNTI IN CUI SI ANNULLA IL VALORE ASSOLUTO, OVVERO:

$$f(x)=|1-\ln x| \Rightarrow 1-\ln x=0$$

$$\Rightarrow \ln x=1 \Rightarrow x=e$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ NON È DERIVABILE IN $x=e$

POSSIAMO PROVARE A VERIFICARE IL TEOREMA DI CAUCHY NELL' INTERVALLO $\left[\frac{e}{2};e\right]$

86. DIRE SE LE FUNZIONI $f(x) = |1-\ln x|$ $g(x) = \ln(x-1)$ NELL' INTERVALLO $\left[\frac{e}{2}; e\right]$ SODDISFANO LE IPOTESI DEL TEOREMA DI CAUCHY

CONTINUE IN $\left[\frac{e}{2}; e\right]$? SI PERCHÈ

C.E. $f(x)$: $x > 0$

C.E. $g(x)$: $x > 1$ $\quad \left(\frac{e}{2} > 1\right)$

DERIVABILI IN $\left]\frac{e}{2}; e\right[$?

$f(x) = |1-\ln x| \qquad 1-\ln x \geq 0 \Rightarrow \ln x \leq 1 \Rightarrow x \leq e$

$$f(x) = \begin{cases} 1-\ln x & \text{PER } x \leq e \\ \ln x - 1 & \text{PER } x > e \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{PER } x < e \\ \frac{1}{x} & \text{PER } x > e \end{cases}$$

$\nexists f'(e)$

A NOI INTERESSA LA FUNZIONE NELL' INTERVALLO $\left[\frac{e}{2}; e\right]$

$f'(x) = -\frac{1}{x}$ PER $x \in \left]\frac{e}{2}; e\right[$

$g(x) = \ln(x-1) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x-1} \neq 0 \quad \forall x \in \left]\frac{e}{2}; e\right[$

$$\left.\begin{aligned} g\left(\tfrac{e}{2}\right) &= \ln \tfrac{e-2}{2} \\ g(e) &= \ln(e-1) \end{aligned}\right\} \quad g\left(\tfrac{e}{2}\right) \neq g(e)$$

IL TEOREMA DI CAUCHY È VERIFICATO (NON RICHIESTA LA RICERCA DI c)