

Color est e pluribus unus

corso di Matematica

prof. Claudio Desiderio

Modulo2: teoremi sulle funzioni derivabili
Funzioni reali di variabile reale

Unita' 1:

Richiami teoremi ed Esercizi

- Teorema di Rolle
- Teorema Di Lagrange

"Non accontentarti di restare nel GRIGIO per paura
del NERO, ma punta dritto al BIANCO..

e tuffati dentro!

Entra nel vortice.. quindi, rallenta:

ritroverai tutti i COLORI

e farai splendere sempre la tua Vita!!"

TEOREMA DI ROLLE

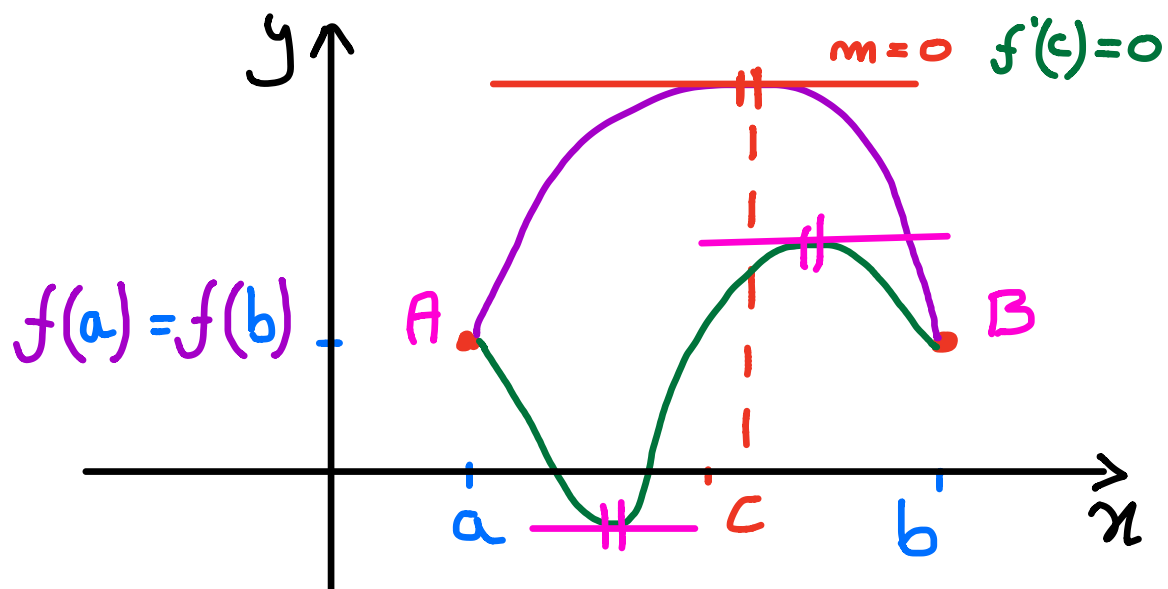
IPOTESI

$$\left. \begin{array}{l} \text{SIA } f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{CONTINUA IN } [a; b] \\ \text{DERIVABILE IN }]a; b[\\ f(a) = f(b) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \{f \text{ DEFINITA IN..}\} \\ \{f \text{ CONTINUA} \\ \text{NELL'INTERVALLO} \\ \text{CHIUSO E LIMITATO..}\} \end{array}$$

TESI

$$\exists c \in]a; b[: f'(c) = 0$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL TEOREMA DI ROLLE



ESEMPI

1. $f(x) = x^4 - 2x^2$ in $[-1; 1]$

CONTINUA in $[-1; 1]$? SI, PERCHÈ C.E. $\forall x \in \mathbb{R}$

DERIVABILE in $]-1; 1[$? SI, PERCHÈ $f'(x) = 4x^3 - 4x \forall x \in \mathbb{R}$

$f(-1) = f(1)$? SI, PERCHÈ $f(-1) = 1 - 2 = -1$ $f(1) = -1$

PER IL TEOREMA DI ROLLE

$$\exists c \in]-1; 1[: f'(c) = 0 \Rightarrow 4c^3 - 4c = 0$$

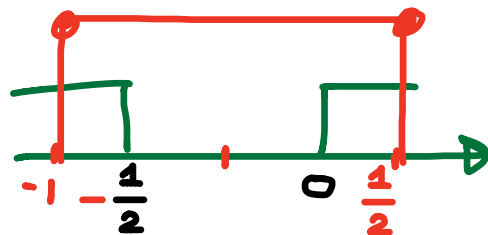
$$4c(c^2 - 1) = 0 \begin{cases} c = 0 \in]-1; 1[\Rightarrow c = 0 \\ c = \pm 1 \text{ N.A.} \end{cases}$$

2. $f(x) = \ln(x + 2x^2)$ in $[-1; \frac{1}{2}]$

CONTINUA in $[-1; \frac{1}{2}]$?

$$\text{C.E. } x + 2x^2 > 0 \quad x(2x + 1) > 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x < -\frac{1}{2} \vee x > 0$$



NON È CONTINUA in $[-1; \frac{1}{2}]$

$\Rightarrow$ NO ROLLE

3. $f(x) = 2|x| - x^2$ in $[-2; 2]$

DOMINIO : $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ CONTINUA
in $[-2; 2]$

DERIVATA : OCCORRE DISTINGUERE
2 CASI

• $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{PER } x \geq 0 \\ -2x - x^2 & \text{PER } x \leq 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - 2x & \text{PER } x > 0 \\ -2 - 2x & \text{PER } x < 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^+) = 2 \\ f'(0^-) = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ NON È DERIVABILE} \\ \text{in } x_0 = 0 \in]-2; 2[$$

$\Rightarrow f$ NON È DERIVABILE IN $] -2; 2[$
 $\rightarrow$ NO ROLLE

MA, SE RESTRINGIAMO L'INTERVALLO ...

$$f(x) = 2|x| - x^2 \quad \text{in } [0; 2]$$

... $f(x)$ È DERIVABILE IN $]0; 2[$

$$f'(x) = 2 - 2x \quad \forall x \in]0; 2[$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(2) = 0 \end{array} \right\} f(0) = f(2)$$

$\Rightarrow$ PER IL TEOREMA DI ROLLE

$$\exists c \in]0; 2[: f'(c) = 0$$

$$2 - 2c = 0 \Rightarrow c = 1$$

MA, SE CAMBIO INTERVALLO...

$$f(x) = 2|x| - x^2 \quad \text{in } [0; 1]$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) \neq f(1)$$

NO ROLLE

PROVACI TU...

1. $f(x) = 3 + \sqrt{4 - x^2}$ $\text{in } [-2; 2]$

2. $f(x) = \ln(-3x^2 + 6x + 1)$ $\text{in } [0; 2]$

3. $f(x) = \sqrt[3]{5x - 6 - x^2}$ $\text{in } [2; 3]$

4. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$ $\text{in } [\frac{1}{4}; 4]$

5. $f(x) = 4^{\sin x}$ $\text{in } [0; \pi]$

6. $f(x) = 2x - \sqrt{5x + 6}$ $\text{in } [-1; -\frac{3}{4}]$

TEOREMA DI LAGRANGE

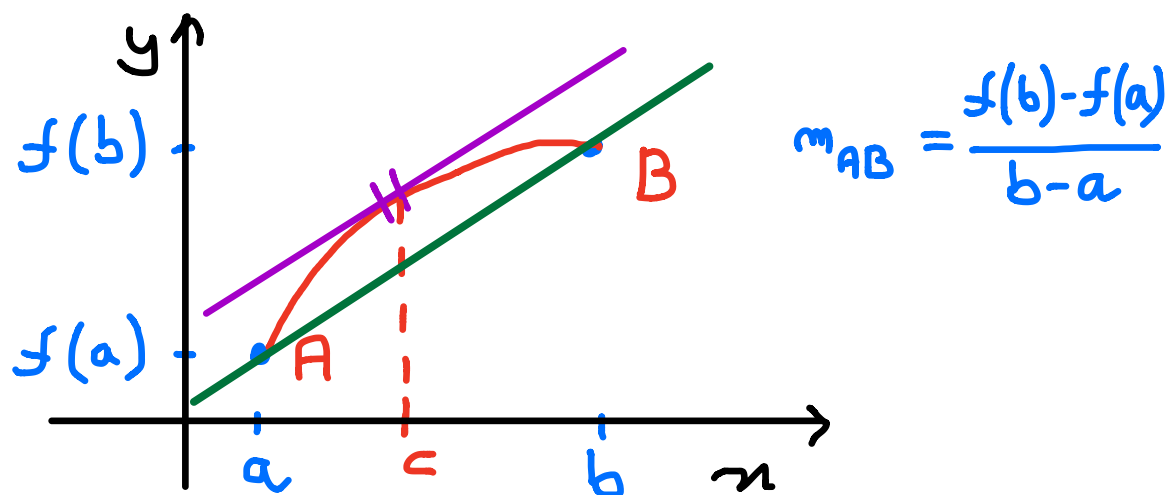
IPOTESI

$$\left. \begin{array}{l} f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \\ f \text{ CONTINUA IN } [a; b] \\ f \text{ DERIVABILE IN }]a; b[\\ f(a) \neq f(b) \end{array} \right\} \text{hp}$$

TESI

$$\exists c \in]a; b[: f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO



$\exists$ ALMENO UN PUNTO DI ASCISSA c IN CUI
LA RETTA TANGENTE È PARALLELA
ALLA SECANTE AB

ESEMPI

$$1. \quad f(x) = x - x^2 \quad [0; 2]$$

CONTINUA IN $[0; 2]$? C.E. $\forall x \in \mathbb{R}$

DERIVABILE IN $]0; 2[$? $f' = 1 - 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = 2 - 4 = -2$$

$\Rightarrow$ PER IL TEOREMA DI LAGRANGE

$$\exists c \in]0; 2[: f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$$

$$1 - 2c = \frac{-2 - 0}{2}$$

$$1 - 2c = -1 \quad 2c = 2 \quad \rightarrow c = 1$$

2. $f(x) = \sqrt{2x+1}$ in $[0; 4]$

CONTINUA IN $[0; 4]$? SI, PERCHÈ C.E. $x \geq -\frac{1}{2}$

DERIVABILE IN $]0; 4[$? SI, PERCHÈ $f' = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(4) = \sqrt{8+1} = 3 \end{array} \right\} 1 \neq 3$$

$$x > -\frac{1}{2}$$

PER IL TEOREMA DI LAGRANGE

$$\exists c \in]0; 4[: f'(c) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2x+1}} = \frac{3-1}{4} \Rightarrow \sqrt{2x+1} = 2$$

$$\Rightarrow 2x+1 = 4 \Rightarrow 2x = 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2} \in]0; 4[\quad c = \frac{3}{2}$$

$$3. f(x) = \sqrt[3]{x-1} \quad \text{in } [0; 2]$$

CONTINUA IN $[0; 2]$? SÌ, PERCHÉ..

C.E. $\forall x \in \mathbb{R}$

DERIVABILE IN $]0; 2[$?

$$f' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} \quad x \neq 1 \in]0; 2[$$

$\Rightarrow f$ NON DERIVABILE IN $]0; 2[$

MA SE RESTRINGIAMO L'INTERVALLO IN $]0; 1[$

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1} \quad \text{in } [0; 1]$$

CONTINUA IN $\mathbb{R} \Rightarrow$ CONTINUA IN $[0; 1]$

$$f' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} \quad x \neq 1 \Rightarrow \text{DERIVABILE IN }]0; 1[$$

$$f(0) = \sqrt[3]{0-1} = -1$$

$$f(1) = \sqrt[3]{1-1} = 0$$

PER IL TEOREMA DI LAGRANGE

$$\exists c \in]0;1[: f'(c) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0}$$

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{0+1}{1-0} \Rightarrow 3\sqrt[3]{(x-1)^2} = 1$$

$$(x-1)^2 = \frac{1}{27}$$

$$x-1 = \pm \sqrt{\frac{1}{27}}$$

$$c = 1 - \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ x = 1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} \end{cases}$$

PROVACI TU...

1. $f(x) = x - x^3$ $[-2; 1]$

2. $f(x) = \ln(2x-1)$ in $[1; 2]$

3. $f(x) = \frac{2x}{1-x}$ in $[-5; 0]$

4. $f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - ax + a & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

PER QUALI VALORI DI a E' APPL. LAGRANGE?
 $c = ?$