# Color est e pluribus unus

corso di Matematica

prof. Claudio Desiderio

**Modulo2: applicazione delle derivate**
**Funzioni reali di variabile reale**

**Unita' 3:**

**Continuita' e derivabilita'**

- **premessa, definizioni**
- **esempi sulla ricerca dei parametri per soddisfare la condizione di derivabilita'**

"Non accontentarti di restare nel GRIGIO per paura
del NERO, ma punta dritto al BIANCO..
e tuffati dentro!
Entra nel vortice.. quindi, rallenta:
ritroverai tutti i COLORI
e farai splendere sempre la tua Vita!!"

# DERIVABILITÀ E CONTINUITÀ

## PREMESSA

LA CONTINUITÀ È UNA CONDIZIONE NECESSARIA (NON SUFFICIENTE) PER LA DERIVABILITÀ, CIOÈ:

hp: $f(x)$ DERIVABILE IN $x_0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ CONTINUA IN $x_0$ (ts)

(NON VALE IL VICEVERSA: VEDI ESEMPI DI FUNZIONI CONTINUE IN $x_0$ MA NON DERIVABILI $\rightsquigarrow$ PUNTI ANGOLOSI E CUSPIDALI)

## COME VERIFICARE LA DERIVABILITÀ IN $x_0$?

PRIMA SI VERIFICA LA CONTINUITÀ:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

POI SI VERIFICA LA DERIVABILITÀ:

$$\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$$

VEDIAMO ALCUNI ESEMPI...

EX 1.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+3x+b & \text{SE } x\geq 1 \\ x^2-bx+a & \text{SE } x<1 \end{cases}$$

CONTINUITÀ IN $x_0=1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(ax^2+3x+b\right)=a+3+b$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(x^2-bx+a\right)=1-b+a$$

$$\Rightarrow \cancel{a}+3+b=1-b+\cancel{a} \Rightarrow 2b=-2 \Rightarrow b=-1$$

DERIVABILITÀ IN $x_0=1$

SI ESCLUDE $=1$

TROVIAMO LA DERIVATA

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+3 & \text{SE: } x>1 \\ 2x-b & \text{SE: } x<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(2ax+3\right)=2a+3$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(2x-b\right)=2-b$$

$$2a+3=2-b$$

$$\begin{cases} b=-1 \\ 2a=-1-b \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-1 \\ 2a=0 \end{cases} \Rightarrow a=0$$

EX 2.

$$f(x)=\begin{cases} 3h\,e^{3x-1}+2k & \text{SE } x\le\frac{1}{3} \\ 2k\log 3x+1 & \text{SE } x>\frac{1}{3}\end{cases}$$

$e^0=1$

CONTINUITÀ IN $x_0=\frac{1}{3}$

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{3}^-}\left(3h\,e^{\boxed{3x-1}}+2k\right)=3h+2k$$

$\to 0$

$\log 1 = 0$

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{3}^+}\left(2k\boxed{\log 3x}+1\right)=1$$

IMPONIAMO LA CONTINUITÀ: $3h+2k=1$

DERIVATA:

$$f'(x)=\begin{cases} 3h\,e^{3x-1}\cdot 3=9h\,e^{3x-1} & \text{SE } x<\frac{1}{3} \\ 2k\,\frac{1}{\cancel{3}x}\cdot\cancel{3}=\frac{2k}{x} & \text{SE } x>\frac{1}{3}\end{cases}$$

DERIVABILITÀ: IN $x=\frac{1}{3}$

$\to 0$

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}^-} f'(x) = \lim_{x \to \frac{1}{3}^-} \left( 9h\underbrace{e^{3x-1}}_{1} \right) = 9h$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}^+} f'(x) = \lim_{x \to \frac{1}{3}^+} \left( \frac{2k}{x} \right) = \frac{2k}{\frac{1}{3}} = 6k$$

IMPONIAMO LA DERIVABILITÀ:

$$9h = 6k \Rightarrow 3h = 2k$$

METTENDO A SISTEMA LE 2 CONDIZIONI SI AVRÀ:

$$\begin{cases} 3h + 2k = 1 \\ 3h = 2k \end{cases} \qquad \begin{cases} 3h + 3h = 1 \Rightarrow 6h = 1 \\ 2k = 3h \Rightarrow k = \frac{3}{2}h \end{cases}$$

$$\begin{cases} h = \frac{1}{6} \\ k = \underbrace{\frac{\cancel{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{6}_{2}}} \end{cases} \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

$$S: \; k = \frac{1}{4} \wedge h = \frac{1}{6}$$

EX 3

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{SE} \quad x>0 \\ e^{cx}+1 & \text{SE} \quad x<0 \\ c+2a & \text{SE} \quad x=0 \end{cases}$$

S: $a=c=\frac{2}{3}$ $\qquad b=2$

EX 2

$$f(x)=\begin{cases} a+\ln x & \text{PER} \quad x>1 \\ b\,e^{x-1}+2 & \text{PER} \quad x\leq 1 \end{cases}$$

EX 3

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & 0\leq x\leq 1 \\ x^2-kx+k & 1<x\leq 2 \end{cases}$$

$k=?$ AFFINCHÈ SIA DERIVABILE IN $[0;2]$

[MATURITÀ SCIENTIFICA 2015]

$k=-1$