Color est e pluribus unus

corso di Matematica

prof. Claudio Desiderio

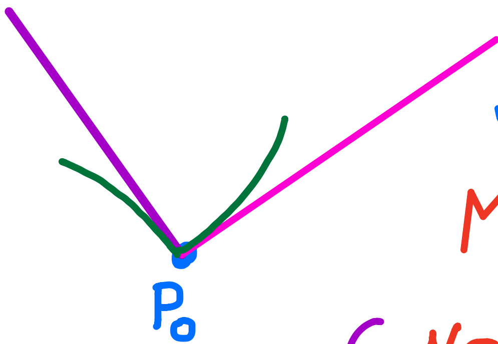
Modulo2: applicazione delle derivate
Funzioni reali di variabile reale

Unita' 4:
derivabilita' e punti angolosi

- esempi di funzioni con valore assoluto
- Esempio di funzione multi definita

"Non accontentarti di restare nel GRIGIO per paura
del NERO, ma punta dritto al BIANCO..
e tuffati dentro!
Entra nel vortice.. quindi, rallenta:
ritroverai tutti i COLORI
e farai splendere sempre la tua Vita!!"

PUNTO ANGOLOSO



f CONTINUA IN x_0
(NON SI INTERROMPE)

MA ...

f NON DERIVABILE IN x_0

E PRECISAMENTE: IN x_0 CI SONO
2 TANGENTI DISTINTE

UTILIZZANDO IL LINGUAGGIO MATEMATICO, DIREMO CHE

$P_0(x_0; f(x_0))$ È UN PUNTO ANGOLOSO
SE: $f(x)$ È CONTINUA IN x_0
MA NON È DERIVABILE ; PRECISAMENTE:

$$\exists f'(x_0^-) = m_1 \quad \exists f'(x_0^+) = m_2 \quad m_1 \neq m_2$$

OVVERO:
ESISTONO FINITE DERIVATA DESTRA E SINISTRA
MA SONO DISTINTE.

OSSERVAZIONE

IL PUNTO ANGOLOSO RAPPRESENTA UN CHIARO ESEMPIO DI FUNZIONE CONTINUA IN x_0 MA NON DERIVABILE

« LA CONTINUITÀ È UNA CONDIZIONE NECESSARIA MA NON SUFFICIENTE PER LA DERIVABILITÀ »

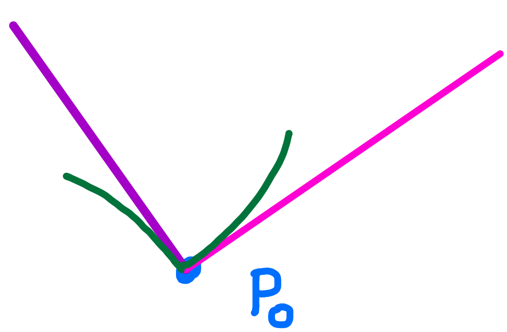
$$\text{DERIVABILITÀ} \; \Longrightarrow \; \text{CONTINUITÀ}$$

$$\text{DERIVABILITÀ} \; \cancel{\Longleftarrow} \; \text{CONTINUITÀ}$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO

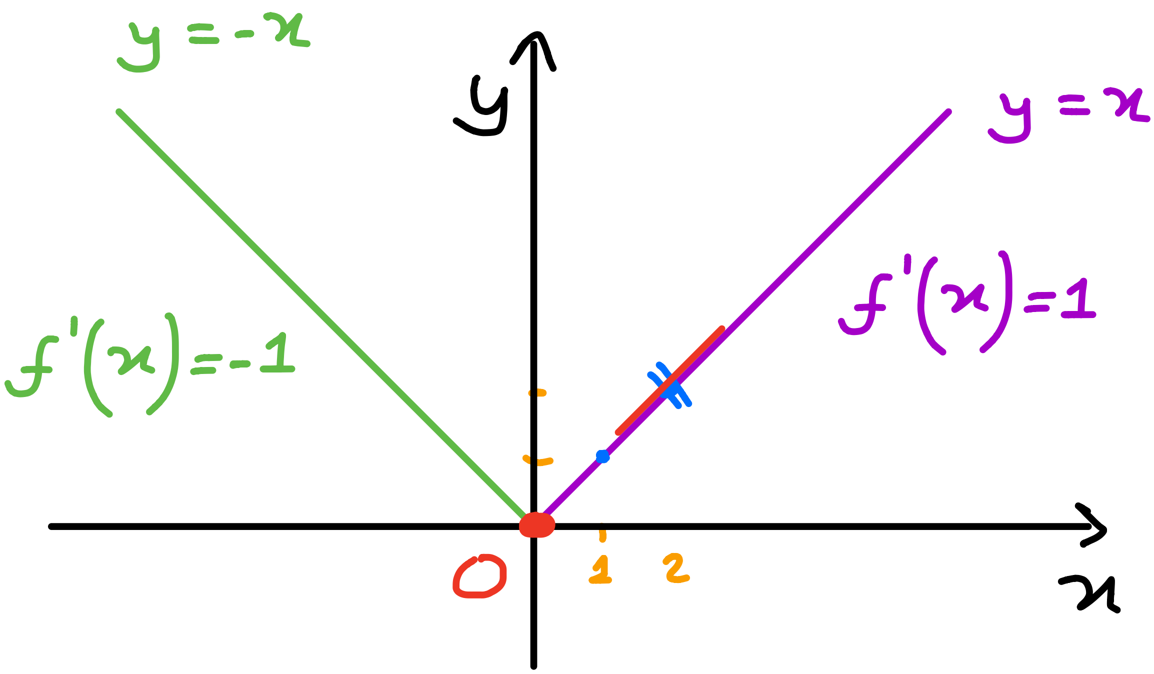
RICORDANDO CHE $f'(x_0)$ RAPPRESENTA IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI $f(x)$ IN x_0

NEL PUNTO ANGOLOSO AVREMO 2 TANGENTI
(UNA A DESTRA E UNA A SINISTRA)



ESEMPIO SEMPLICE

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{PER } x \geq 0 \quad y = x \\ -x & \text{PER } x \leq 0 \quad y = -x \end{cases}$$



IN GENERALE LE FUNZIONI CON VALORE ASSOLUTO PRESENTANO PUNTI ANGOLOSI

ES. 2

$$f(x) = |x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ -x^2+1 & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

SARÀ SUFFICIENTE RAPPRESENTARE LA PARABOLA:

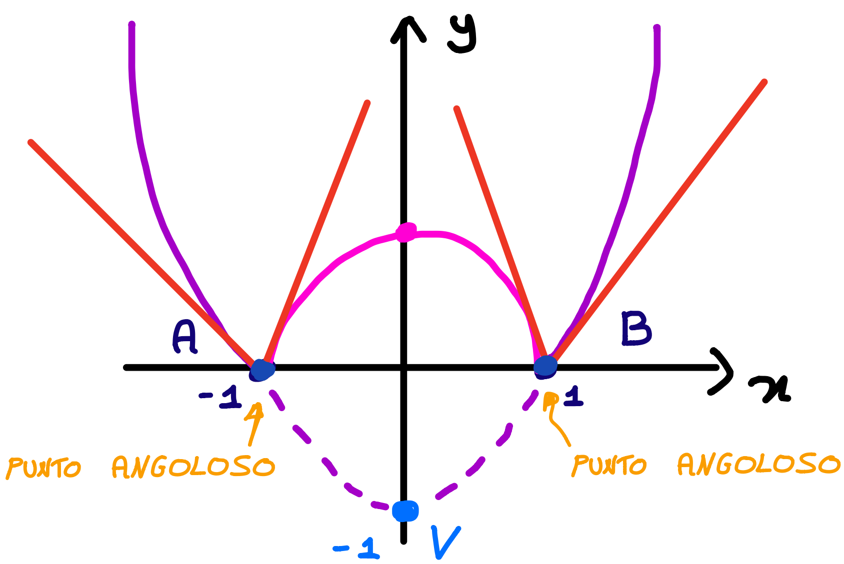
$$y = x^2-1$$

E "RENDERE" POSITIVA LA PARTE NEGATIVA

VERTICE $V(0;-1)$ $b=0 \Rightarrow V(0;c)$

CONCAVITÀ VERSO L'ALTO $a=1>0$

INTERSEZIONE CON L'ASSE x $A(-1;0)$ $B(1;0)$



DERIVABILITÀ E TANGENTI

$\nexists f'(-1)$ $\nexists f'(1)$

$$f(x)=|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & x\leq -1 \vee x\geq 1 \\ -x^2+1 & -1\leq x\leq 1\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x<-1 \vee x>1 \\ -2x & -1<x<1\end{cases}$$

N.B. NON SAPPIAMO SE IN $x=\pm 1$ È DERIVABILE

NEI PUNTI $A(-1;0)$ E $B(1;0)$ AVREMO 2 TANGENTI

INFATTI:

$f'(-1^-)=\lim\limits_{x\to -1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} 2x=-2$ $\quad tg^-: y-0=-2(x+1)$ SINISTRA

$f'(-1^+)=\lim\limits_{x\to -1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} -2x=2$ $\quad tg^+: y-0=2(x+1)$ DESTRA

$f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} -2x=-2$ $\quad tg^-: y-0=-2(x-1)$ SINISTRA

$f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x=2$ $\quad tg^+: y-0=2(x-1)$ DESTRA

ESEMPIO (FUNZIONE CON VALORE ASSOLUTO

TROVARE EVENTUALI PUNTI ANGOLOSI DELLA FUNZIONE :

$$f(x) = \frac{|x-1|-2}{x-4}$$

E SCRIVERE LE EQUAZIONI DELLE 2 TANGENTI (DESTRA E SINISTRA)

DOMINIO : $x \neq 4$ $\quad D = \mathbb{R} - \{4\}$

SUDDIVIDIAMO I 2 CASI :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{x-4} & \text{SE: } x \geq 1 \\ \dfrac{-x-1}{x-4} & \text{SE: } x < 1 \end{cases}$$

STUDIAMO LA CONTINUITÀ IN $x_0 = 1$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \frac{2}{3} \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \frac{2}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{CONTINUA}$$

(N.B. ACCADE SEMPRE!!)

STUDIAMO LA DERIVABILITÀ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{x-4} & \text{SE: } x \geq 1 \\ \dfrac{-x-1}{x-4} & \text{SE: } x < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1 \cdot (x-4) - (x-3) \cdot 1}{(x-4)^2} = \dfrac{-1}{(x-4)^2} & x > 1 \\ \dfrac{-1(x-4) + (x+1) \cdot 1}{(x-4)^2} = \dfrac{5}{(x-4)^2} & x < 1 \end{cases}$$

DERIVABILITÀ IN $x_0 = 1$ $\quad P\left(1; \frac{2}{3}\right)$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = -\frac{1}{9} \Rightarrow f'(1^+) = -\frac{1}{9}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \frac{5}{9} \Rightarrow f'(1^-) = \frac{5}{9}$$

TANGENTE DX: $y - \frac{2}{3} = -\frac{1}{9}(x-1)$

TANGENTE SX: $y - \frac{2}{3} = \frac{5}{9}(x-1)$

UN ALTRO ESEMPIO

È POSSIBILE TROVARE PUNTI ANGOLOSI ANCHE NELLE FUNZIONI MULTIDEFINITE

ESEMPIO: COMPLETALO TU...

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x+1 & \text{PER } x \leq 1 \\ \dfrac{4}{x} & \text{PER } x > 1 \end{cases}$$

CONTINUITÀ IN $x = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \end{array}\right\} \Rightarrow$$

DERIVABILITÀ:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x+1 & x \leq 1 \\ \dfrac{4}{x} & x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \\ \end{cases}$$

N.B. IN $x = 1$ NON SI METTE L'UGUALE

DERIVABILITÀ IN $x_0 = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1} (2x+2) =$$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1} \left(-\frac{4}{x^2}\right) =$$

LE TANGENTI IN $P_0(1;4)$ SONO:

TANGENTE SX :

TANGENTE DX :

PROVACI TU...

1) $f(x) = |x^2 - 3x|$

2) $f(x) = \dfrac{2 - |x-1|}{x+3}$

3) $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{PER } x \leq -1 \\ -\dfrac{3}{x} & \text{PER } x > 1 \end{cases}$