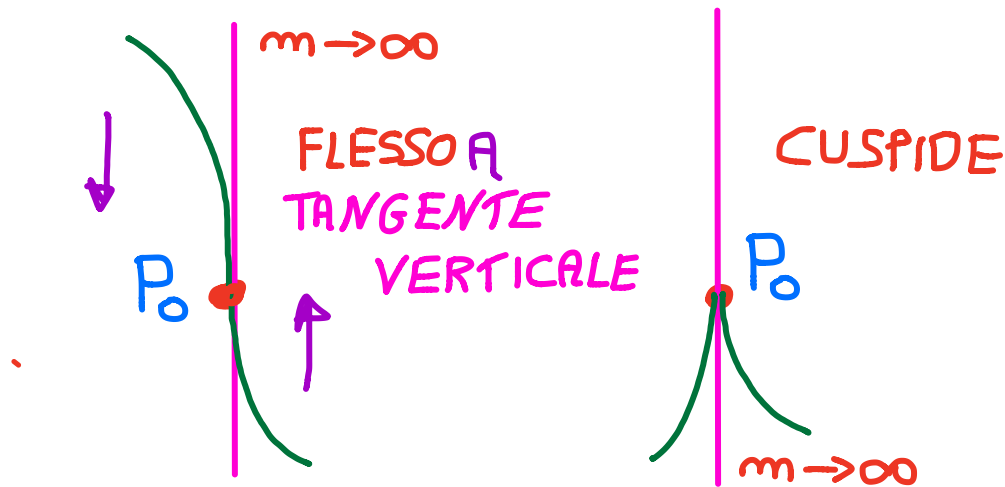


PUNTI A TANGENTE VERTICALE

UN ALTRO ESEMPIO FUNZIONE CONTINUA MA NON DERIVABILE
SI HA NEI PUNTI A TANGENTE VERTICALE:



RICORDANDO CHE :

- IL COEFFICIENTE ANGOLARE DI UNA RETTA VERTICALE,
NON ESISTE OVVERO TENDE AD INFINITO

- $f'(x_0) = m_t$ OVVERO RAPPRESENTA IL
COEFFICIENTE ANGOLARE

DELLA RETTA TANGENTE AL GRAFICO IN x_0

POSSIAMO DEDURRE CHE:

SE $f(x)$ È CONTINUA IN x_0 E

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \infty \quad \nexists f'(x_0)$$

ALLORA :

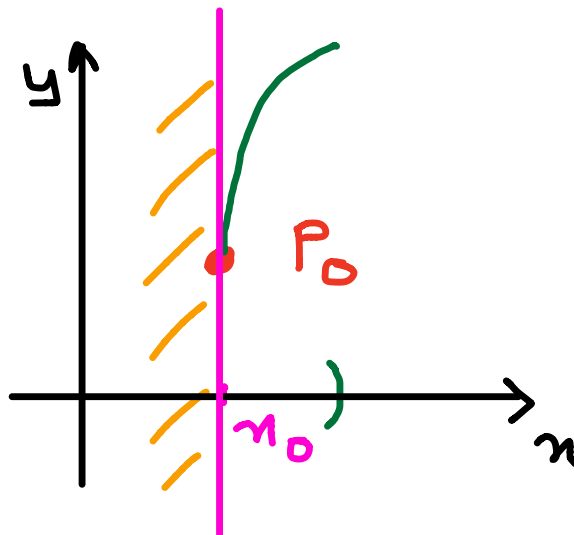
NEL PUNTO DI ASCISSA x_0 SI HA UNA

TANGENTE VERTICALE

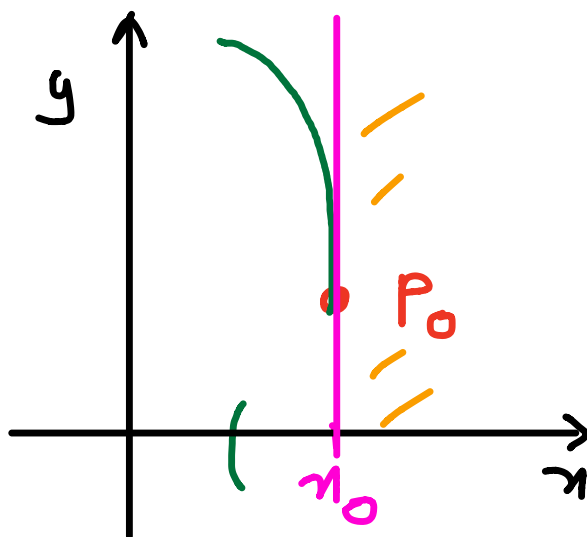
ALCUNI CASI ED ESEMPI

1)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = +\infty$$



2)



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = -\infty$$

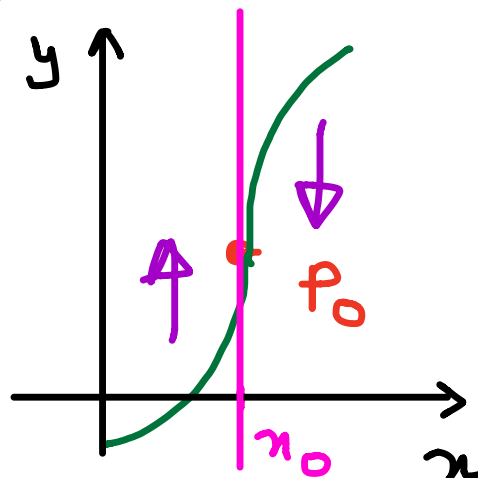
3)

PUNTO DI FLESSO A TANGENTE VERTICALE

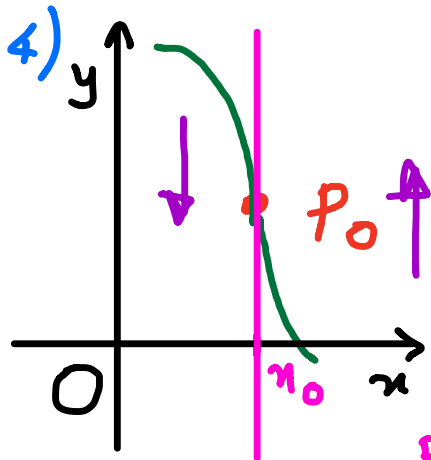
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = +\infty$$

(FLESSO DISCENDENTE)



E ANALOGAMENTE...



$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = -\infty$$

PUNTO DI FLESSO ASCENDENTE
A TANGENTE VERTICALE

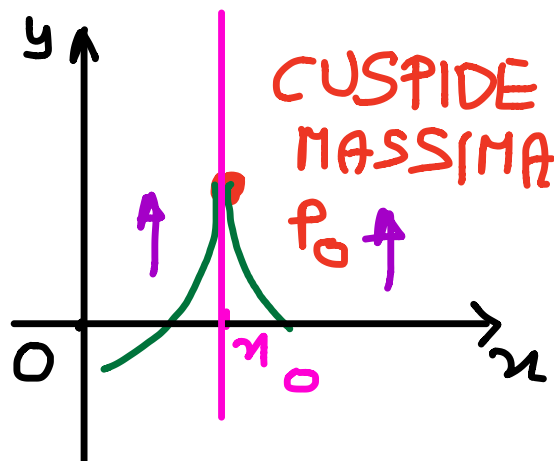
... E ANCORA PIU' INTERESSANTE...

5)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = +\infty$$

PUNTO CUSPIDALE
MASSIMO

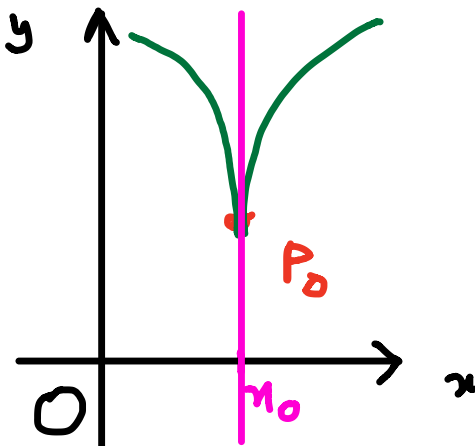


6) ANALOGAMENTE...

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = -\infty$$

PUNTO CUSPIDALE
MINIMO



IN QUALI FUNZIONI TROVIAMO QUESTI PUNTI?
NELLE FUNZIONI IRRAZIONALI

1) $f(x) = \sqrt{x}$

$$D = [0; +\infty[$$

DERIVATA:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall x > 0 \quad (x \neq 0)$$

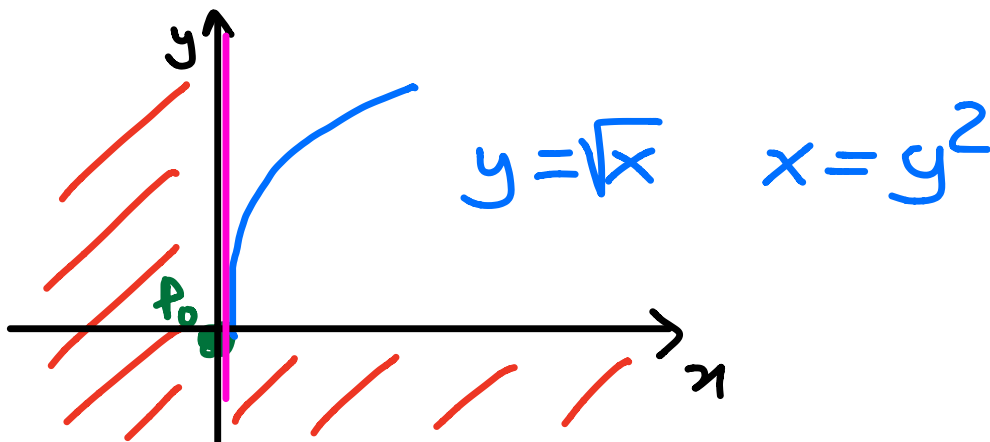
DERIVABILITÀ IN $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$$

$\nexists f'(0)$

$\Rightarrow$ TANGENTE VERTICALE

GRAFICO



N.B. QUESTO COMPORTAMENTO LO
TROVIAMO IN TUTTE LE FUNZIONI
IRRAZIONALI PARI

PROVACI TU...

$$1) f(x) = \sqrt{1-x} \quad x_0 = 1$$

$$2) f(x) = \sqrt{x^2 - x} \quad x_0 = 0 \quad x_0 = 1$$

$$3) f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} \quad x_0 = 1 \quad x_0 = 2$$

$$4) f(x) = \sqrt{3 + 4x - x^2} \quad x_0 = 3 \quad x_0 = 1$$

FUNZIONI IRRAZIONALI DISPARI

ESEMPIO 1

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^1} \quad \text{DOMINIO: } D = \mathbb{R}$$

INTERSEZIONE ASSI: $A(1;0)$ $B(0;-1)$

SEGNO: $f(x) \geq 0$ in $[1; +\infty[$

DERIVATA PRIMA:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} \quad \checkmark$$

DOMINIO DELLA DERIVATA: $x \neq 1$ $\nexists f'(1)$

COSA VUOL DIRE?

NEL PUNTO DI ASCISSA $x_0 = 1$ LA FUNZIONE È
CONTINUA MA NON DERIVABILE.

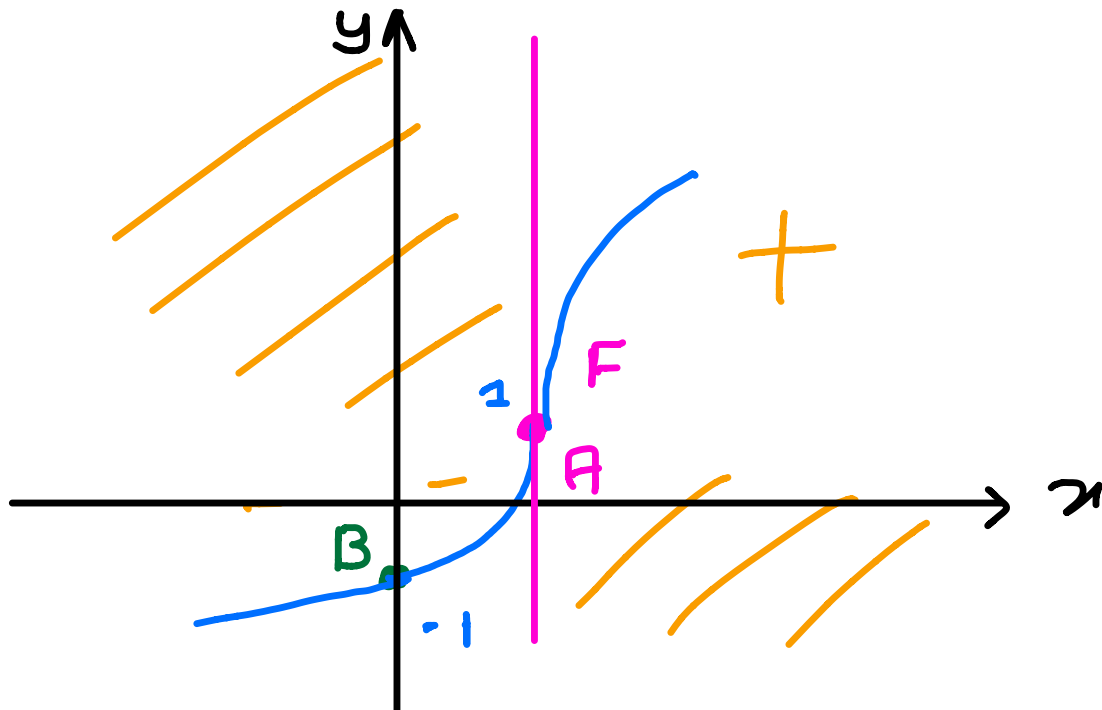
EBBENE: STUDIANDO IL COMPORTAMENTO DELLA DERIVATA CON
IL LIMITE PER $x \rightarrow 1$ SCOPRIAMO CHE SI TRATTA DI UN
PUNTO A TANGENTE VERTICALE

E PRECISAMENTE:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} \quad \checkmark$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \text{PUNTO DI FLESSO A TANGENTE VERTICALE}$$

RAPPRESENTANDO GRAFICAMENTE



ESEMPIO 2

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} \quad D = \mathbb{R}$$

INTERSEZIONI: A(1;0) B(0;1)

SEGNO:

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

DERIVATA PRIMA:

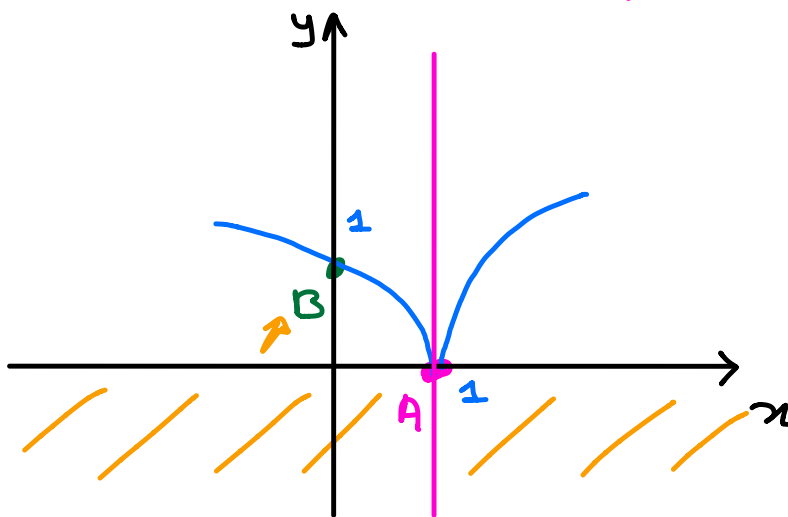
$$f'(x) = \frac{2}{3 \sqrt[3]{(x-1)}^{3-2}} = \frac{2}{3 \sqrt[3]{x-1}}$$

DOMINIO DELLA DERIVATA: $x \neq 1$

$$\begin{aligned} \text{SEGNO: } f'(x) &\geq 0 \text{ in }]1; +\infty[\\ f'(x) &\leq 0 \text{ in }]-\infty; 1[\end{aligned}$$

LIMITI DELLA DERIVATA PER $x \rightarrow 1$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) &= +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{CUSPIDE MINIMA}$$



PROVACI TU...

$$1) f(x) = \sqrt[3]{1-x}$$

$$2) f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2}$$

$$3) f(x) = \sqrt[3]{8-x}$$

$$4) f(x) = \sqrt[3]{(8-x)^2}$$

ESEMPI PIU' DIFFICILI

$$1) f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x}}{x+1}$$

$$2) f(x) = \sqrt{x^2-4} - x$$

$$3) f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x}$$

$$4) f(x) = \sqrt[3]{1+x^3} + x$$