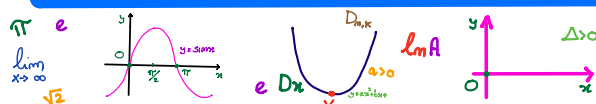


MATEMATICA A COLORI PER TUTTI

CONCAVITA' E FLESSI

FLIPPED
MATH



WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

MATEMATICA A COLORI PER TUTTI

SE $f''(x) > 0 \quad \forall x \in]a; b[\Rightarrow f$ CONVESSA $\text{su }]a; b[$

SE $f''(x) < 0 \quad \forall x \in]a; b[\Rightarrow f$ CONCAVA $\text{su }]a; b[$

SE $f''(x_0) = 0 \quad \text{con } x_0 \in]a; b[\Rightarrow$ PUNTO DI FLESSO

WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

CONCAVITA' DI UNA FUNZIONE

PREMESSA

1. DIREMO CHE $f(x)$ E' CONVESSA IN $]a; b[$ SE:

$$\forall x_1, x_2 \in]a; b[\Rightarrow$$

$$f(x) \leq f(x_1) + \overbrace{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1)}^{y^*}$$

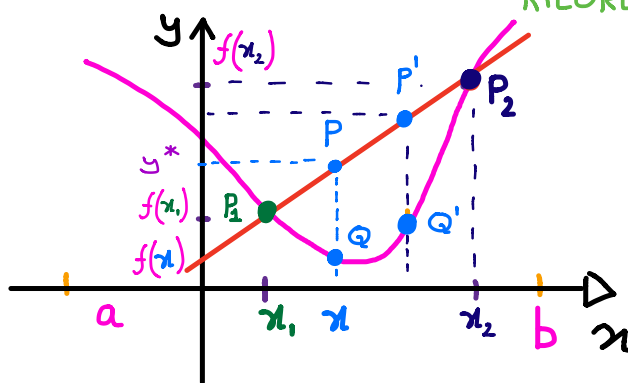
RICORDANDO CHE LA RETTA P_1P_2 HA EQUAZ .

$$y - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

OVVERO : IL GRAFICO DI $f(x)$

SI TROVA AL DI SOTTO

DEL SEGMENTO P_1P_2



2. DIREMO CHE $f(x)$ E' CONCAVA IN $]a; b[$ SE:

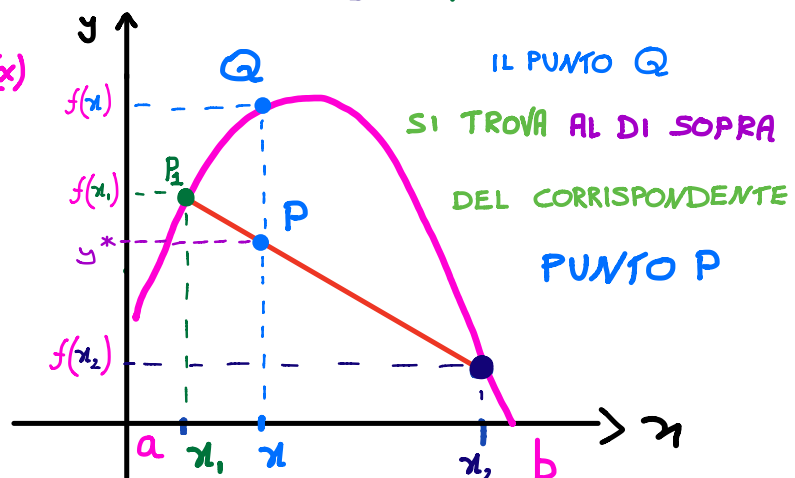
$$\forall x_1, x_2 \in]a; b[\Rightarrow$$

$$f(x) \geq f(x_1) + \overbrace{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1)}^{y^*}$$

OVVERO : IL GRAFICO DI $f(x)$

SI TROVA AL DI SOPRA

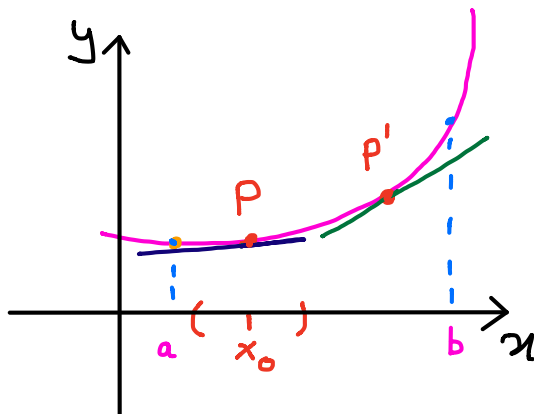
DEL SEGMENTO P_1P_2



OSSERVAZIONE :

UN ALTRO MODO INTERESSANTE PER DEFINIRE LE FUNZIONI
CONVESSE E CONCAVE IN $]a; b[$

1. DIREMO CHE $f(x)$ È CONVESSA IN $]a; b[$ SE:



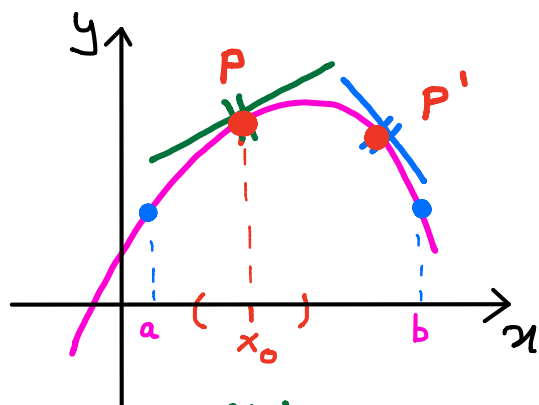
$\forall x_0 \in]a; b[$ LA
TANGENTE AL GRAFICO IN x_0
SI TROVA AL DI SOTTO
DEL GRAFICO DI $f(x)$
IN UN INTORNO DI x_0

N.B. SI DICE ANCHE CHE: $f(x)$ VOLGE
CONCAVITÀ VERSO L'ALTO IN $]a; b[$

ANALOGAMENTE :

2. DIREMO CHE $f(x)$ È CONCAVA IN $]a; b[$ SE:

$\forall x_0 \in]a; b[$ LA
TANGENTE AL GRAFICO IN x_0
SI TROVA AL DI SOPRA
DEL GRAFICO DI $f(x)$
IN UN INTORNO DI x_0



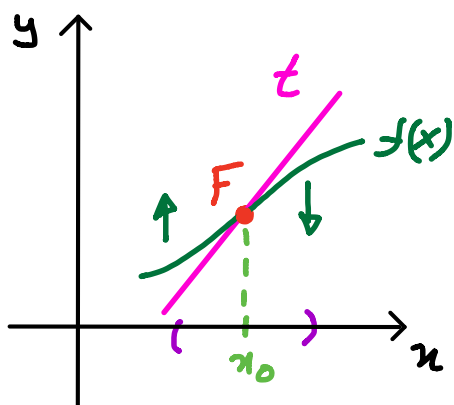
N.B. IN TAL CASO SI DICE ANCHE CHE $f(x)$ VOLGE
CONCAVITÀ VERSO IL BASSO IN $]a; b[$

DEFINIZIONE DI PUNTO DI FLESSO

ESISTONO PIÙ DEFINIZIONI DI PUNTO DI FLESSO

LA PIÙ INTUITIVA Afferma CHE:

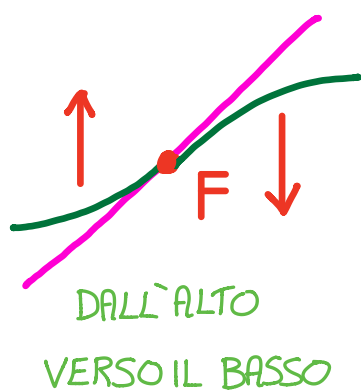
x_0 È L'ASCISSE DI UN PUNTO DI FLESSO PER $f(x)$
SE: LA TANGENTE AL GRAFICO DI $f(x)$ IN x_0
ATTRAVERSA IL GRAFICO DI $f(x)$



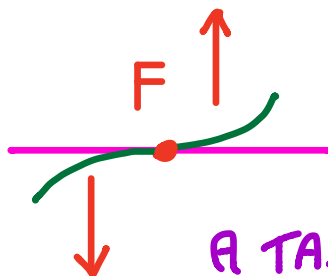
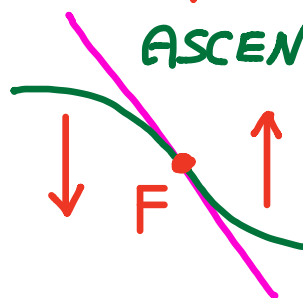
OVVERO:

IN x_0 IL GRAFICO
CAMBIA CONCAVITÀ
(DA CONCAVA A CONVESSA
O VICEVERSA)

FLESSO DISCENDENTE



FLESSO ASCENDENTE



FLESSO
A TANGENTE
ORIZZONTALE

TEOREMA DERIVATE-CONCAVITA'

SIA $f:]a;b[\rightarrow \mathbb{R}$

(SIA f UNA FUNZIONE DEFINITA IN $]a;b[$ A VALORI IN $\mathbb{R}$)

$\exists f'(x), f''(x) \quad \forall x \in]a;b[$

OVVERO: LA FUNZIONE AMMETTE DERIVATA PRIMA E SECONDA

SE $f''(x) > 0 \quad \forall x \in]a;b[\Rightarrow f$ CONVESSA
in $]a;b[$

SE $f''(x) < 0 \quad \forall x \in]a;b[\Rightarrow f$ CONCAVA
in $]a;b[$

SE $f''(x_0) = 0$ con $x_0 \in]a;b[\Rightarrow$

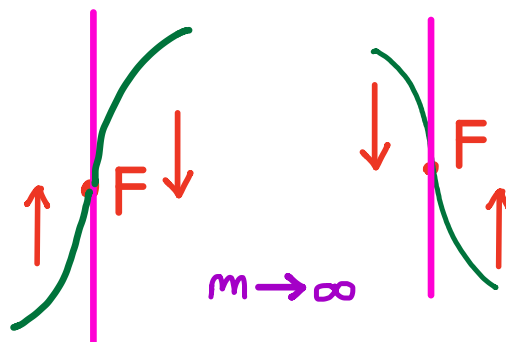
in x_0 SI HA UN PUNTO DI FLESSO

OSSERVAZIONE

UN PARTICOLARE PUNTO DI FLESSO

FLESSO A TANGENTE
VERTICALE

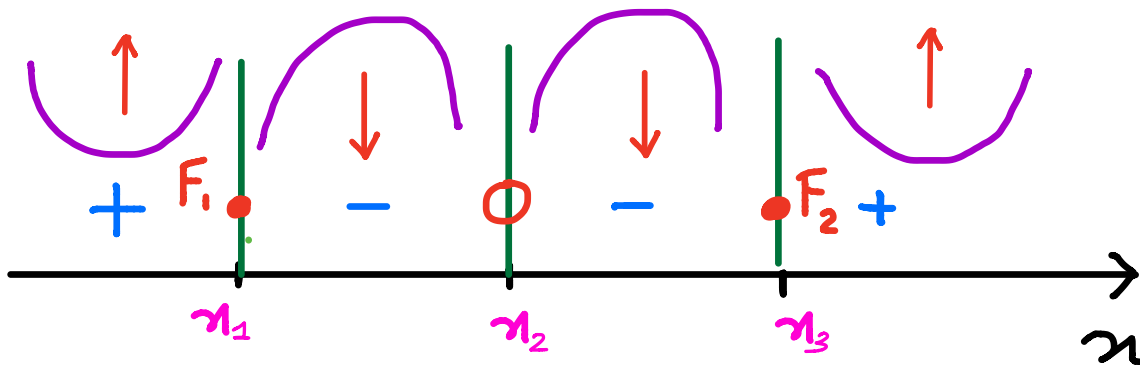
(CASO PARTICOLARE DI FUNZIONE
CONTINUA NON DERIVABILE



ATTRAVERSO LO STUDIO DEL SEGNO DELLA
DERIVATA SECONDA E' POSSIBILE
CONOSCERE LA CONCAVITA' DI UNA FUNZIONE

ESEMPIO TEORICO

SUPPONIAMO DI AVER TROVATO IL SEGUENTE
STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA SECONDA



POSSIAMO DEDURRE CHE:

f CONVESSA IN $]-\infty; x_1[$ E IN $]x_2; +\infty[$

f CONCAVA IN $]x_1; x_3[- \{x_2\}$

$x = x_1$ FLESSO DISCENDENTE

$x = x_3$ FLESSO ASCENDENTE

ESERCIZI SVOLTI

EX 1 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

EX 2 $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

EX 2 bis $f(x) = 6x^4 + 8x^3 + 1$

EX 3 $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

EX 4 $f(x) = \frac{2x + 3}{x - 5}$

EX. 5 $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$

EX 6 $f(x) = \ln(-x^2 - x + 6)$

EX 7 $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

ESEMPI

① $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ $D = \mathbb{R}$

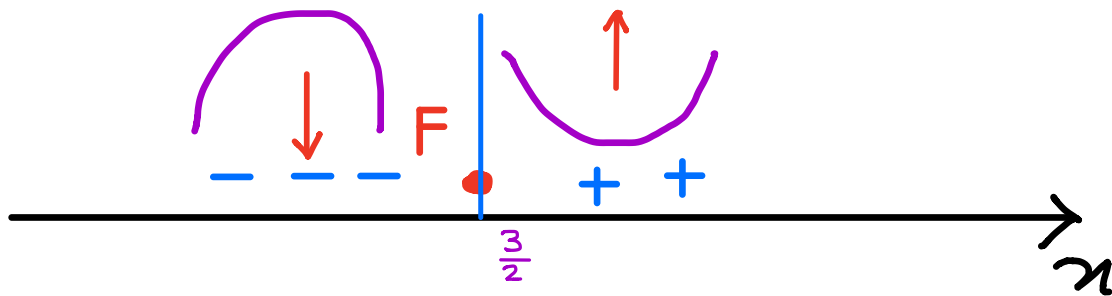
DERIVATA PRIMA: $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

DERIVATA SECONDA: $f''(x) = 12x - 18 = 6(2x - 3)$

STUDIO DEL SEGNO: $f''(x) \geq 0$

$$6(2x - 3) \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

GRAFICO DEI SEGNI:



f CONVESSA IN $\left] \frac{3}{2} ; +\infty \right[$

f CONCAVA IN $\left] -\infty ; \frac{3}{2} \right[$

$x = \frac{3}{2}$ FLESSO ASCENDENTE

N.B. $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 18 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 12 \neq 0$

FLESSO A TANGENTE OBLIQUA

EX 2 (FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE)

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3$$

$$D = \mathbb{R}$$

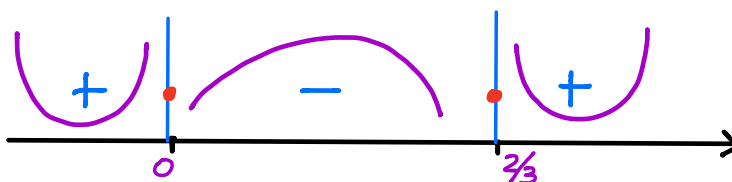
DERIVATA PRIMA: $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$

DERIVATA SECONDA: $f''(x) = 36x^2 - 24x$

STUDIO DEL SEGNO: $f''(x) \geq 0$

$$12x(3x - 2) \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \vee x \geq \frac{2}{3}$$

GRAFICO DEI SEGNI:



f CONVESSA IN $]-\infty; 0[\cup]\frac{2}{3}; +\infty[$

f CONCAVA IN $]0; \frac{2}{3}[$

$x = 0$ FLESSO DISCENDENTE

$x = \frac{2}{3}$ FLESSO ASCENDENTE

N.B. $f'(0) = 0 \Rightarrow$ FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE

EX 3

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x}$$

$$D = \mathbb{R} - \{0\}$$

DERIVATA PRIMA:

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$$

DERIVATA SECONDA:

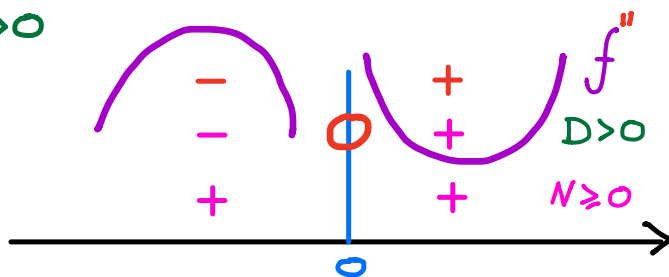
$$f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x(x^2-x^2+1)}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

STUDIO DEL SEGNO: $f''(x) \geq 0$

$$N \geq 0 \quad 2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$D > 0 \quad x^3 > 0 \quad x > 0$$

GRAFICO DEI SEGNI



f CONVESSA IN $]0; +\infty[$

f CONCAVA IN $] -\infty; 0[$

NON CI SONO FLESSI

PROVA A COMPLETARE LO STUDIO DEL GRAFICO

EX 4

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-5}$$

$$D = \mathbb{R} - \{5\}$$

DERIVATA PRIMA:

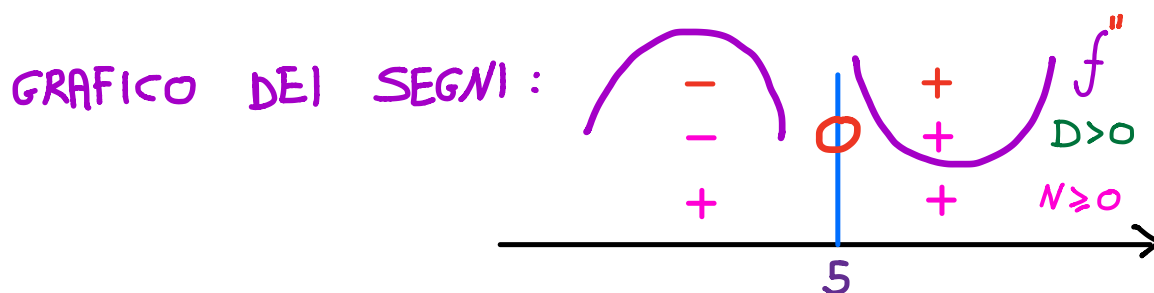
$$f' = \frac{-13}{(x-5)^2}$$

DERIVATA SECONDA:

$$f'' = \frac{0 \cdot (x-5)^2 - (-13) \cdot 2(x-5)}{(x-5)^4} = \frac{26(x-5)}{(x-5)^3}$$

STUDIO DEL SEGNO: $f''(x) \geq 0$

$$\begin{array}{l} N \geq 0 \quad 26 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ D > 0 \quad (x-5)^3 > 0 \quad \rightarrow \quad x-5 > 0 \quad x > 5 \end{array}$$



f CONVESSA IN $]5; +\infty[$

f CONCAVA IN $]-\infty; 5[$

NON CI SONO FLESSI

EX. 5

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x$$

$$D =]0; +\infty[$$

DERIVATA PRIMA:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}$$

DERIVATA SECONDA:

$$f''(x) = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}x - (\sqrt{x} - 2) \cdot 1}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{x - 2x + 4\sqrt{x}}{x^2} = \frac{-x + 4\sqrt{x}}{4x^2\sqrt{x}}$$

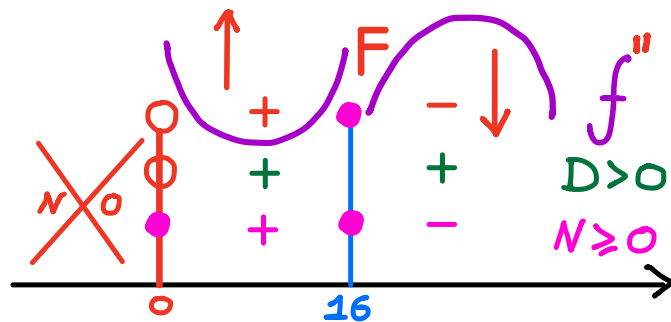
PER SEMPLICITÀ LO POSSIAMO PORTARE FUORI

STUDIO DEL SEGNO: $f''(x) > 0$ RICORDA, NEL DOMINIO
ABBIAMO POSTO: $x > 0$

$$N \geq 0 \quad -x + 4\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow x \leq 4\sqrt{x} \Rightarrow x^2 \leq 16x \Rightarrow 0 \leq x \leq 16$$

$$D > 0 \quad 4x^2\sqrt{x} > 0 \Rightarrow x > 0$$

GRAFICO DEI SEGNI
NEL DOMINIO



f CONVESSA IN $]0; 16[$

f CONCAVA IN $]16; +\infty[$

$x = 16$ FLESSO DISCENDENTE

EX 6

$$f(x) = \ln(-x^2 - x + 6) \quad D =]-3; 2[$$

DERIVATA PRIMA:

$$f'(x) = \frac{2x+1}{-x^2-x+6}$$

DERIVATA SECONDA:

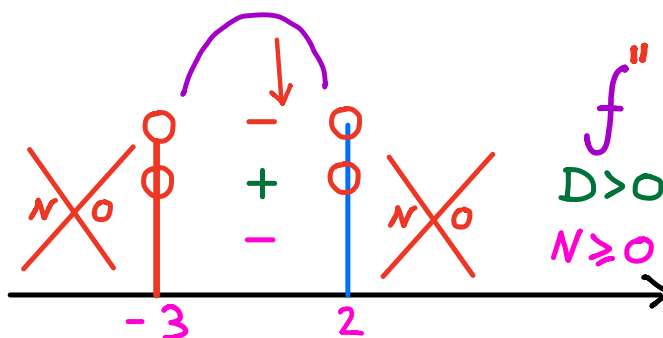
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2(-x^2-x+6) - (2x+1)(2x+1)}{(-x^2-x+6)^2} = \frac{2x^2+2x-12 - 4x^2-4x-1}{(-x^2-x+6)^2} = \\ &= \frac{-2x^2-2x-13}{(-x^2-x+6)^2} \end{aligned}$$

STUDIO DEL SEGNO: $f''(x) \gtrless 0$

$$N \gtrless 0 \quad -2x^2-2x-13 \gtrless 0 \Rightarrow 2x^2+2x+13 \lessgtr 0 \quad \frac{\Delta}{4} = 1-26 < 0 \quad \nexists x \in \mathbb{R}$$

$$D > 0 \quad (-x^2-x+6)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x \neq -3 \wedge x \neq 2$$

GRAFICO DEI SEGNI
NEL DOMINIO



$f(x)$ CONCAVA IN $]-3; 2[$

NON CI SONO FLESSI

EX 7

$$f(x) = \sqrt{4-x^2}$$

$$D = [-2; 2]$$

DERIVATA PRIMA:

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$x \neq \pm 2$$

DERIVATA SECONDA:

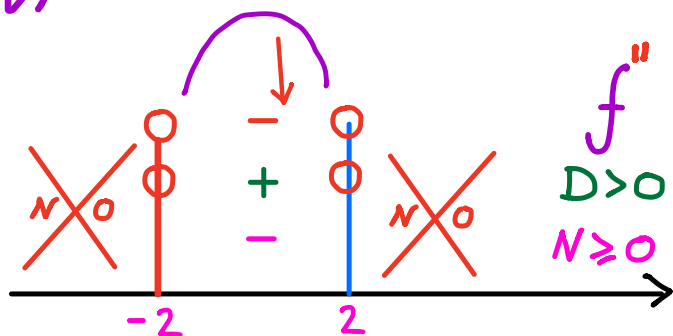
$$f''(x) = \frac{-1 \cdot \sqrt{4-x^2} - (-x) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}}{(\sqrt{4-x^2})^2} = \frac{-4+x^2-x^2}{4-x^2} =$$

$$= \frac{-4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} \quad x \neq \pm 2$$

$- \quad N < 0$
 -4
 $(4-x^2)\sqrt{4-x^2}$
 $+ \quad +$
 $D > 0$

GRAFICO DEI SEGNI

NEL DOMINIO



$f(x)$ CONCAVA IN $]-2; 2[$

NON CI SONO FLESSI

PROVACI TU...

$$1) f(x) = x e^x$$

$$2) f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 1}$$

$$3) f(x) = x^2 \ln x$$

$$4) f(x) = \frac{1}{x^4 + 2x^3}$$

$$5) f(x) = \frac{\ln x^2}{x}$$

$$6) f(x) = \sqrt{\ln x - 3}$$