MATEMATICA A COLORI PER TUTTI

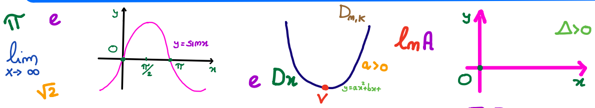
EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL 1° ORDINE

DEFINIZIONI; CASI SEMPLICI

PROBLEMA DI CAUCHY

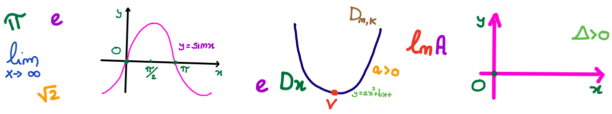
VARIABILI SEPARABILI LINEARI DEL 1° ORDINE

FLIPPED MATH



WWW. CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

MATEMATICA A COLORI PER TUTTI



FLIPPED MATH

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

BLOG

WWW. CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

DEFINIZIONE

SI DICE EQUAZIONE DIFFERENZIALE UNA EQUAZIONE CHE HA COME INCOGNITA UNA FUNZIONE $y=f(x)$ E CHE METTE IN RELAZIONE LA VARIABILE INDIPENDENTE x, LA FUNZIONE y E LE SUE DERIVATE SUCCESSIVE.

VEDIAMO SUBITO UN SEMPLICISSIMO ESEMPIO

$$y' = 2x$$

DOBBIAMO TROVARE UNA FUNZIONE $y=f(x)$ CHE HA PER DERIVATA $2x$

OVVERO: DOBBIAMO SEMPLICEMENTE INTEGRARE

$$y = \int 2x \, dx = x^2 + c$$

N.B. ECCO PERCHÈ LA SOLUZIONE SI CHIAMA ANCHE: INTEGRALE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

CHIAMEREMO ORDINE DELL' EQUAZIONE DIFFERENZIALE L'ORDINE m DELLA DERIVATA DI ORDINE MASSIMO.

FORMA GENERALE DI UN' EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI ORDINE m :

$$F(x;y;y';y'....;y^{m})=0$$

EX. EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL 1° ORDINE:

$$F(x;y;y')=0$$

EX $y'=x+y$

EX $y'=2xy-x^2$

2° ORDINE

$$F(x;y;y';y'')=0$$

EX $y''+2y'-y=x$

DEFINIZIONE

SI DICE CHE UNA FUNZIONE $y=f(x)$ È SOLUZIONE O INTEGRALE DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE SE, SOSTITUENDO LA SUA ESPRESSIONE E QUELLE DELLE SUE DERIVATE NELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DATA, QUESTA DIVENTA UN' IDENTITÀ.

INTEGRALE GENERALE

È UN'ESPRESSIONE DEL TIPO:

$$y=f(x;c_1;c_2;\dots;c_m)$$ CHE,

AL VARIARE DI $c_1;c_2;\dots;c_m$ RAPPRESENTA UN INTEGRALE DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE.

ASSEGNANDO PARTICOLARI VALORI AI PARAMETRI, SI OTTENGONO GLI INTEGRALI PARTICOLARI.

SE INVECE GLI INTEGRALI NON CORRISPONDONO A PARTICOLARI VALORI DEI PARAMETRI, SI DICONO INTEGRALI SINGOLARI.

CERCHIAMO DI CAPIRE L'IMPORTANZA DEI PARAMETRI $c_1 ; c_2 ; \dots ; c_m$ ATTRAVERSO UN IMPORTANTISSIMO PROBLEMA DI FISICA

È POSSIBILE TROVARE L'EQUAZIONE ORARIA DI UN MOTO RETTILINEO UNIFORME CONOSCENDO L'ACCELERAZIONE?

$$a = 2 \, m/s^2$$

RICORDANDO CHE: $a = v' = \dfrac{dv}{dt}$

$v' = 2$ RAPPRESENTA UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

$$v(t) = \int 2 \, dt = 2t + c_1$$

PER TROVARE c_1 SERVE UNA CONDIZIONE INIZIALE SULLA VELOCITÀ; AD ESEMPIO:

$$v(0) = 3 \, m/s$$

$$v(0) = 2 \cdot 0 + c_1 = c_1 = 3$$

QUINDI: $v(t) = 2t + 3$

ADESSO, RICORDANDO CHE:

$$v = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

SI HA:

$$s'(t) = 2t + 3$$

CHE RAPPRESENTA UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

INTEGRANDO:

$$s(t) = \int 2t + 3 \, dt = \cancel{2}\frac{t^2}{\cancel{2}} + 3t + c_2$$

PER TROVARE c_2 SERVE UNA CONDIZIONE INIZIALE SULLA POSIZIONE ; AD ESEMPIO.

$s(0) = 4$ m SOSTITUENDO ...

$$s(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 + c_2 = c_2 = 4$$

L'EQUAZIONE ORARIA È:

$$s(t) = t^2 + 3t + 4$$

QUESTO ESEMPIO METTE IN EVIDENZA L'IMPORTANZA DELLE CONDIZIONI INIZIALI PER DETERMINARE LA SOLUZIONE PARTICOLARE

QUESTO TIPO DI PROBLEMA È NOTO COME:

IL PROBLEMA DI CAUCHY

ATTRAVERSO LE CONDIZIONI INIZIALI DEL SISTEMA È POSSIBILE TROVARE I VALORI DEI PARAMETRI $c_1, c_2, \dots c_n$.

IL MODELLO DI TALE PROBLEMA È NOTO COME PROBLEMA DI CAUCHY, E SI PUÒ ESPRIMERE NEL MODO SEGUENTE:

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL 1° ORDINE:

$$\begin{cases} F(x; y; y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL 2° ORDINE:

$$\begin{cases} F(x; y; y'; y'') = 0 \\ y'(x_1) = y_1 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

1° CASO: $y' = f(x)$

SAPENDO CHE: $y' = \frac{dy}{dx}$ SI HA:

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)$ MOLTIPLICANDO PER dx:

$dy = f(x)\,dx$ INTEGRANDO SI HA:

$$\Rightarrow \int 1\,dy = \int f(x)\,dx$$

DA CUI:

$$y = \int f(x)\,dx$$

ESEMPI (CON PROBLEMA DI CAUCHY)

$$\begin{cases} y' - 2\cos x = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE: $y' - 2\cos x = 0$

$$y' = 2\cos x \Rightarrow y = \int 2\cos x\,dx = 2\sin x + c$$

LA c SI TROVA CON IL PROBLEMA DI CAUCHY

IMPONENDO LA CONDIZIONE:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

È POSSIBILE TROVARE c
E QUINDI UN INTEGRALE PARTICOLARE

$$f(x)=2\sin x+c$$

SI HA:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}+c=1$$ DA CUI

$$2\cdot 1+c=1 \implies c=-1$$

UN'INTEGRALE PARTICOLARE È:

$$f(x)=2\sin x-1$$

PROVACI TU

1. $y' = \dfrac{x+1}{x}$ $\qquad y = x + \ln|x| + c$

2. $y' = 3\sin^2 x \cdot \cos x$ $\qquad y = \sin^3 x + c$

3. $y' = \dfrac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$ $\qquad y = e^{\tan x} + c$

PROBLEMI DI CAUCHY

4. $e^x \cdot y' = 3$ con $y(0) = 5$

S: $y = -3e^{-x} + 8$

5. $y' = \tan x$ con $y\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \ln 2$

S: $y = -\ln|\cos x|$

SECONDO ORDINE ELEMENTARE

1. $y'' = 2x$ $\qquad$ S: $y = \frac{1}{3}x^3 + c_1 x + c_2$

2. $y'' = \sin x + \cos 2x$

S: $y = -\sin x - \frac{1}{4}\cos 2x + c_1 x + c_2$