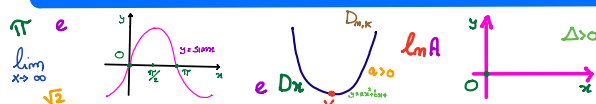


MATEMATICA A COLORI PER TUTTI

GEOMETRIA
ANALITICA
NELLO
SPAZIO 1
(IL PIANO)

FLIPPED
MATH



WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

MATEMATICA A COLORI PER TUTTI



FLIPPED
MATH

GEOMETRIA ANALITICA
NELLO SPAZIO
BLOG
↙ ↓ ↘

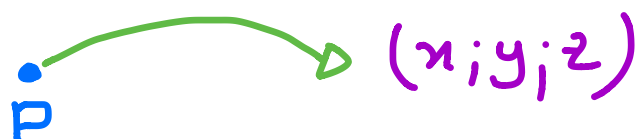
WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

COORDINATE NELLO SPAZIO

$$P(x; y; z)$$

x : ASCISSA; y : ORDINATE; z : QUOTA

ESISTE UNA CORRISPONDENZA BIUNIVOCATA
TRA PUNTI NELLO SPAZIO E TERNE DI
NUMERI REALI.



DISTANZA TRA PUNTI

DATI 2 PUNTI:

$$A(x_A; y_A; z_A) \quad B(x_B; y_B; z_B)$$

CASI SEMPLICI

$$1. \quad x_A = x_B \wedge y_A = y_B \quad AB = |z_B - z_A|$$

$$2. \quad x_A = x_B \wedge z_A = z_B \quad AB = |y_B - y_A|$$

$$3. \quad y_A = y_B \wedge z_A = z_B \quad AB = |x_B - x_A|$$

ESEMPIO

$$A(-2; 3; 1) \quad B(-2; -1; 1)$$

$$AB = |-1 - 3| = 4$$

CASO GENERALE

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

ESEMPIO

$$A(-2; 1; 0) \quad B(2; -3; -1)$$

$$AB = \sqrt{(2 + 2)^2 + (-3 - 1)^2 + (-1 - 0)^2} =$$

$$= \sqrt{16 + 16 + 1} = \sqrt{33}$$

UN CASO INTERESSANTE:

DISTANZA DALL'ORIGINE

$$P(x; y; z)$$

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

$$A(x_A; y_A; z_A) \quad B(x_B; y_B; z_B)$$

$$M_{AB} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

PROVACI TU...

- 1) DATO IL TRIANGOLO DI VERTICI :
 $A(-2; 0; 1)$ $B(0; -2; 3)$ $C(4; 4; -1)$
VERIFICA CHE IL SEGMENTO CHE
UNISCE I PUNTI MEDI DEI LATI AB E AC
E' LA META' DEL LATO BC .

EQUAZIONE DI UN PIANO

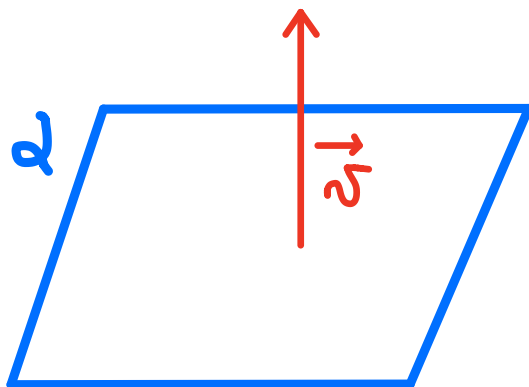
LUOGO GEOMETRICO DEI PUNTI $P(x;y;z)$
CHE VERIFICANO UN' EQUAZIONE DI 1° GRADO:

$$d: ax + by + cz = d \quad (\text{FORMA IMPLICITA})$$

CON:

$$\vec{n} = (a; b; c)$$

ETTORE PERPENDICOLARE
AL PIANO d



ESEMPIO

$$d: 3x + 2y + z = 5$$

CON:

$$\vec{n} = (3; 2; 1)$$

COMPONENTI DI UN VETTORE
PERPENDICOLARE AL PIANO d

ESERCIZIO: PIANO PER 3 PUNTI

$$A(1;0;0) \quad B(0;3;0) \quad C(0;0;3)$$

IMPONENDO IL PASSAGGIO PER I 3 PUNTI
NELL'EQUAZIONE:

$$ax + by + cz = d$$

$$A: a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = d \rightarrow a = d$$

$$B: a \cdot 0 + b \cdot 3 + c \cdot 0 = d \rightarrow b = \frac{d}{3}$$

$$C: a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 3 = d \rightarrow c = \frac{d}{3}$$

$$\text{SI OTTIENE: } dx + \frac{d}{3}y + \frac{d}{3}z = d$$

DIVIDENDO PER d E MOLTIPLICANDO PER 3

$$d: 3x + y + z = 3$$

$$\vec{n} = (3; 1; 1)$$

PIANI IN POSIZIONI PARTICOLARI

$$ax + by + cz = d$$

1. $d = 0$ PASSANTE PER L'ORIGINE

$$ax + by + cz = 0$$

2. $a = 0$ $b \neq 0$ $c \neq 0$ $by + cz = d$
// ASSE x $\perp$ PIANO yz

3. $a \neq 0$ $b = 0$ $c \neq 0$ $ax + cz = d$
// ASSE y $\perp$ PIANO xz

4. $a \neq 0$ $b \neq 0$ $c = 0$ $ax + by = d$
// ASSE z $\perp$ PIANO xy

5. $a \neq 0$ $b = 0$ $c = 0$ $ax = d$
 $\perp$ ASSE x // PIANO yz

6. $a = 0$ $b \neq 0$ $c = 0$ $by = d$
 $\perp$ ASSE y // PIANO xz

7. $a = 0$ $b = 0$ $c \neq 0$ $cz = d$
 $\perp$ ASSE z // PIANO xy

ESEMPI

1. $x - 2y = 0$ $c = 0$

// ASSE Z $\perp$ PIANO xy

2. $x = -3$ $b = 0$ $c = 0$

$\perp$ ASSE x // PIANO yz

FORMA ESPlicita DELL'EQUAZIONE
DEL PIANO

$$ax + by + cz = d \quad \text{SE: } c \neq 0$$

ISOLIAMO z : $cz = -ax - by + d$

E SI DIVIDE PER c

$$z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y + \frac{d}{c}$$

SI OTTIENE:

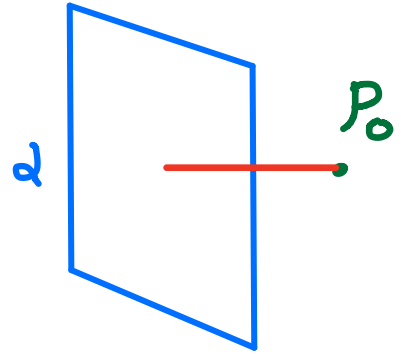
$$z = mx + my + q$$

$$\vec{n} = (m, m, -1)$$

DISTANZA DI UN PUNTO DA UN PIANO

$$P_0(x_0; y_0; z_0)$$

$$d: ax + by + cz + d = 0$$



$$d(P_0; d) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

ESEMPIO

$$P_0(-2; 3; 1) \quad d: 2x + 3y - z = 2$$

$$d(P_0; d) = \frac{|-4 + 9 - 1 - 2|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

PROVACI TU....

TROVA IL RAGGIO DELLA SFERA DI CENTRO
 $K(-2; -1; 2)$ TANGENTE AL PIANO π AVENTE EQUAZIONE
 $2x - 2y + z - 9 = 0$

(DAL QUESITO 5 DELLA Maturità Scientifica 2016)

$$R = 3$$

RICHIAMI IMPORTANTI

CONDIZIONE DI PERPENDICOLARITÀ TRA VETTORI

$$\vec{v} = (a; b; c) \quad \vec{w} = (a'; b'; c')$$

$$\vec{v} \perp \vec{w} \iff \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

↑
PRODOTTO SCALARE

$$\iff a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0$$

TRAMITE COMPONENTI

ESEMPIO

$$\vec{v} (2; -1; 3) \quad \vec{w} (0; 3; 1)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 0$$

PARALLELISMO TRA VETTORI

$$\vec{v} = (a; b; c) \quad \vec{w} = (a'; b'; c')$$

$$\vec{v} \parallel \vec{w} \iff \vec{v} = k \vec{w}$$

ESEMPIO

$$\vec{v} (2; -1; 3) \quad \vec{w} (-4; 2; -6) \quad \leftarrow \text{COMPONENTI MULTIPLE}$$

ESEMPIO NOTEVOLE (DAL QUESITO 9 DELLA Maturità SCIENTIFICA 2016)

TROVA IL VETTORE $\vec{w}(a;b;c)$ PERPENDICOLARE
AI VETTORI $\vec{n}_1(1;2;1)$ E $\vec{n}_2(1;2;-3)$

(DAL QUESITO 9 DELLA Maturità SCIENTIFICA 2016)

$$\vec{w} \perp \vec{n}_1 \iff \vec{w} \cdot \vec{n}_1 = 0$$

$$a \cdot 1 + b \cdot 2 + c \cdot 1 = 0 \implies a + 2b + c = 0$$

ANALOGAMENTE:

$$\vec{w} \perp \vec{n}_2 \iff \vec{w} \cdot \vec{n}_2 = 0$$

$$a \cdot 1 + b \cdot 2 + c \cdot -3 = 0 \implies a + 2b - 3c = 0$$

METTIAMO A SISTEMA LE 2 CONDIZIONI:

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ a + 2b - 3c = 0 \end{cases} \implies a = -2b$$

$$= -4c = 0 \implies c = 0$$

AL VARIARE DI b TROVO INFINITI VETTORI CHE SODDISFANO LA
CONDIZIONE $\implies \vec{w}(-2b; b; 0)$
IN PARTICOLARE SE: $b = -1 \implies \vec{w}(2; -1; 0)$

PARALLELISMO TRA PIANI

$$\alpha: ax + by + cz + d = 0 \quad \vec{n} = (a; b; c)$$

$$\beta: a'x + b'y + c'z + d' = 0 \quad \vec{w} = (a'; b'; c')$$

$$\alpha // \beta \iff \vec{n} // \vec{w} \iff \begin{matrix} a' = k a \\ b' = k b \\ c' = k c \end{matrix}$$

PERPENDICOLARITÀ TRA PIANI

$$\alpha: ax + by + cz + d = 0 \quad \vec{n} = (a; b; c)$$

$$\beta: a'x + b'y + c'z + d' = 0 \quad \vec{w} = (a'; b'; c')$$

$$\alpha \perp \beta \iff \vec{n} \perp \vec{w}$$

$$\iff a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0$$

PIANO PER UN PUNTO

$$P_0(x_0; y_0; z_0)$$

$$d: a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

ESSENDO $\vec{n} = (a; b; c) \perp d$

ESEMPIO

SCRIVERE L'EQUAZIONE DEL PIANO d
PASSANTE PER $P(-2; 1; 3)$ E PARALLELO A

$$B: 4x - 3y + 5z - 1 = 0$$

$$d: 4(x + 2) - 3(y - 1) + 5(z - 3) = 0$$

$$4x + 8 - 3y + 3 + 5z - 15 = 0$$

$$4x - 3y + 5z = 4$$

PERPENDICOLARITÀ TRA PIANI

$$\alpha: ax + by + cz + d = 0 \quad \vec{n} = (a; b; c)$$

$$\beta: a'x + b'y + c'z + d' = 0 \quad \vec{w} = (a'; b'; c')$$

$$\alpha \perp \beta \iff \vec{n} \perp \vec{w} \iff a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0$$

ESEMPIO

SCRIVERE L'EQUAZIONE DEL PIANO α
PASSANTE PER $P(-2; 1; 3)$ E PERPENDICOLARE A

$$\beta: 4x - 3y + 5z = 1$$

SCRIVO IL PIANO PASSANTE PER $P(-2; 1; 3)$

$$\alpha: a(x+2) + b(y-1) + c(z-3) = 0$$

BASTA IMPORRE:

$$4a - 3b + 5c = 0$$

L'EQUAZIONE AMMETTE INFINITE SOLUZIONI,
PER TROVARE SOLO UN PIANO E' NECESSARIA
UN'ALTRA CONDIZIONE

ESEMPIO NOTEVOLE

(DAL QUESITO 9 DELLA Maturità Scientifica 2016)

DETERMINARE L'EQUAZIONE DEL PIANO PASSANTE PER

$P(1; 0; -2)$ E PERPENDICOLARE AI VETTORI

$\vec{n}_1(1; 2; 1)$ E $\vec{n}_2(1; 2, -3)$

SCRIVO IL PIANO PASSANTE PER $P(1; 0; -2)$

$$\alpha : a(x-1) + b(y-0) + c(z+2) = 0$$

DEVO TROVARE IL VETTORE $\vec{w}(a; b; c)$

PERPENDICOLARE AI VETTORI $\vec{n}_1(1; 2; 1)$ E $\vec{n}_2(1; 2, -3)$

GIÀ SVOLTO PRECEDENTEMENTE

$$\Rightarrow \vec{w}(2; -1; 0)$$

PERTANTO, IL PIANO RICHIESTO È:

$$\Rightarrow \alpha : 2(x-1) - 1(y-0) + 0(z+2) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 2 - y = 0$$

$$\Rightarrow 2x - y - 2 = 0$$

PROVACI TU...

1 DETERMINA IL PIANO PASSANTE PER I PUNTI:

a) $(1; 0; 1)$ $(1; 1; 0)$ $(0; 1; 1)$

$$[x + y + z = 2]$$

b) $(1; 2; 3)$ $(3; -2; 1)$ $(-5; 0; 2)$

$$[-y + 2z = 4]$$

2. DETERMINA IL PIANO PASSANTE PER

L'ASSE z E PER IL PUNTO

$P(1; 2; 3)$

$$2x - y = 0$$