

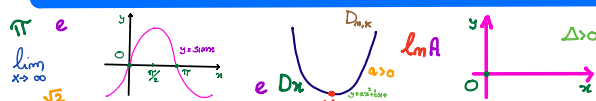
MATEMATICA A COLORI PER TUTTI

EQUAZIONI
DIFFERENZIALI
DEL 1° ORDINE

VARIABILI SEPARABILI

LINEARI DEL 1° ORDINE

FLIPPED
MATH



WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

MATEMATICA A COLORI PER TUTTI



FLIPPED
MATH

EQUAZIONI
DIFFERENZIALI
BLOG



WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

EQUAZIONI DIFFERENZIALI PRIMO ORDINE

2° CASO A VARIABILI SEPARABILI

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

$\uparrow$
FUNZIONE DI x

$\leftarrow$ FUNZIONE DI y

ESEMPIO $y' = 4x \cdot y^2$

$$g(x) = 4x \quad h(y) = y^2$$

COME SI RISOLVE IN GENERALE?

SOSTITUENDO INIZIALMENTE: $y' = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

E SEPARANDO
LE VARIABILI

MOLTIPLICANDO PER dx

E DIVIDENDO PER $h(y)$

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) \cdot dx$$

E QUINDI INTEGRANDO
MEMBRO A MEMBRO

E RISOLVENDO GLI INTEGRALI

RITORNIAMO ALL' ESEMPIO $y' = 4x \cdot y^2$

$$\frac{dy}{dx} = 4x \cdot y^2$$

MOLTIPLICO PER dx
E DIVIDO PER y^2

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 4x \cdot dx \quad \text{E INTEGRO MEMBRO
A MEMBRO}$$

$$\int y^{-2} dy = 4 \int x^1 dx \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{y} = \cancel{4}^2 \frac{x^2}{\cancel{2}} + C$$

INVERTENDO
E MOLTIPLICANDO
PER -1

SI HA

$$y = - \frac{1}{2x^2 + C}$$

PROVACI TU...

1. $y y' = 3$

$$y^2 = 6x + c$$

2. $y' - 3x^2 y^2 = 0$

$$y = -\frac{1}{x^3 + c}$$

3. $y' = \frac{y}{x^2 - 3x + 2}$

$$y = k \frac{x-2}{x-1}$$

4. $y' = (2x-1)e^x$

$$y = e^x(2x-3) + c$$

5. $y \sin x + y' \cos x = 0$

$$y = c \cos x$$

6. $(x+2) y' + y \ln y = 0$

$$y = e^{\frac{c}{x+2}}$$

PROBLEMA DI CAUCHY

7. $y' - 2xy + 2x = 0 \quad y(0) = 2$

$$y = e^{x^2+1}$$

8. $e^{2x-y} \cdot y' = 1 \quad y(0) = \frac{1}{2} \ln 2$

$$y = \frac{1}{2} (x + \ln 2)$$

3° CASO : EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL PRIMO ORDINE

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (y = ax + b)$$

FORMULA RISOLUTIVA

$$y = e^{A(x)} \cdot \int b(x) e^{-A(x)} dx$$

CON $A(x)$ PRIMITIVA DI $a(x)$

(LA DIMOSTRAZIONE LA FAREMO IN SEGUITO)

CON IL METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI

EX. $y' + xy = x$

PROVIAMO A PORTARLO NELLA FORMA NOTA .

$$y' = -xy + x \quad a(x) = -x \quad b(x) = x$$

TROVIAMO $A(x)$

$$A(x) = \int a(x) dx = \int -x dx = -\frac{x^2}{2} + c$$

QUINDI APPLICHIAMO LA FORMULA:

$$y = e^{A(x)} \cdot \int b(x) e^{-A(x)} dx =$$
$$= e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \int x e^{+\frac{x^2}{2}} dx = *$$

FORMULA DI RIFERIMENTO:

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + c$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \quad f'(x) = x$$

$$* = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left(e^{+\frac{x^2}{2}} + c \right) =$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{+\frac{x^2}{2}} = e^0 = 1$$

$$= 1 + c e^{-\frac{x^2}{2}}$$

PROVACI TU...

$$1. \quad y' + \frac{2}{x} y = \frac{e^x}{x}$$

$$y = \frac{e^x(x-1) + c}{x^2}$$

$$2. \quad y' = \frac{1}{x} y - \frac{\ln x}{x}$$

$$x > 0 \quad y = \ln x + 1 + c x$$

$$3. \quad y' = \frac{y}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$$

$$y = c \cdot e^{2\sqrt{x}} - \frac{2x + 2\sqrt{x} + 1}{2}$$

$$4. \quad y' \cos x = y \sin x + \cos x$$

$$y = \frac{\sin x + c}{\cos x}$$

PROBLEMA DI CAUCHY

$$5. \quad y' + y \cos x = \sin x \cos x \quad y(0) = 3$$

$$y = \sin x - 1 + 4 e^{-\sin x}$$

$$6. \quad y' = \frac{2x}{x^2-1} y + \frac{4x}{1-x^2} \quad y(0) = 1$$

$$y = x^2 + 1$$

ESEMPIO SVOLTO n° 3.

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$$

LA FORMULA:

$$y = e^{A(x)} \cdot \int b(x) e^{-A(x)} dx$$

$$A(x) = \int a(x) dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$$

$C=0$

QUINDI:

$$y = e^{2\sqrt{x}} \cdot \underbrace{\int \sqrt{x} e^{-2\sqrt{x}} dx}_{*} =$$

INTEGRALE PER SOSTITUZIONE

$$* \begin{cases} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{cases}$$

$$= e^{2\sqrt{x}} \cdot \int \underbrace{t e^{-2t}}_{2t} dt =$$

$$= e^{2\sqrt{x}} \cdot \underbrace{\int t^2 \cdot e^{-2t} dt}_{\text{INTEGRALE PER PARTI}} = \text{X}$$

INTEGRALE PER PARTI

$$\begin{aligned} g(t) = t^2 &\rightarrow g'(t) = 2t \\ f'(t) = e^{-2t} &\rightarrow f(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times = e^{2\sqrt{x}} \cdot \left[-e^{-2t} \cdot t^2 - \int \underbrace{2t}_{g(t)} \cdot \underbrace{(-e^{-2t})}_{f'(t)} dt \right] = \\
& = e^{2\sqrt{x}} \cdot \left[-e^{-2t} \cdot t^2 - \int \underbrace{t \cdot (-2e^{-2t})}_{\text{INTEGRALE PER PARTI} *} dt \right] = \\
& \quad \begin{array}{l} g(t)=t \rightarrow g'(t)=1 \\ f'(t)=-2e^{-2t} \rightarrow f(t)=e^{-2t} \end{array} \\
& = e^{2\sqrt{x}} \cdot \left[-e^{-2t} \cdot t^2 - \left[\underbrace{t e^{-2t} - \int 1 \cdot e^{-2t} dt}_{\times \int 1 \cdot e^{-2t} dt = -\frac{1}{2} e^{-2t}} \right] \right] = \\
& = e^{2\sqrt{x}} \cdot \left[-e^{-2t} \cdot t^2 - \left[t e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-2t} + c \right] \right] = \\
& = e^{2\sqrt{x}} \cdot \left[-e^{-2t} \cdot t^2 - t e^{-2t} - \frac{1}{2} e^{-2t} + c \right] \quad t = \sqrt{x} \\
& = e^{2\sqrt{x}} \cdot \left[-e^{-2\sqrt{x}} \cdot \cancel{\sqrt{x}^2}^2 - \sqrt{x} e^{-2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} e^{-2\sqrt{x}} + c \right] = \times \\
& \quad e^{2\sqrt{x}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} = e^{2\sqrt{x} - 2\sqrt{x}} = e^0 = 1
\end{aligned}$$

$$\times = -1 \cdot x - \sqrt{x} \cdot 1 - \frac{1}{2} + C e^{2\sqrt{x}} =$$

$$= -\frac{2x + 2\sqrt{x} + 1}{2} + C e^{2\sqrt{x}}$$