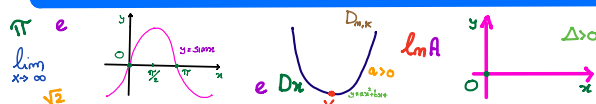


MATEMATICA A COLORI PER TUTTI

GEOMETRIA
ANALITICA
NELLO
SPAZIO 2
(LA RETTA)

FLIPPED
MATH



WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

MATEMATICA A COLORI PER TUTTI



FLIPPED
MATH

GEOMETRIA ANALITICA
NELLO SPAZIO
BLOG
↙ ↓ ↘

WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

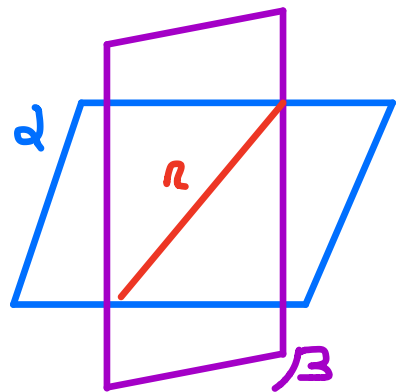
RETTE NELLO SPAZIO CARTESIANO

ESISTONO VARI MODI PER SCRIVERE
L'EQUAZIONE DI UNA RETTA

1. INTERSEZIONE TRA 2 PIANI (NON PARALLELI)

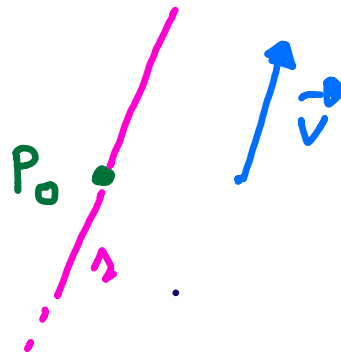
$$r = \alpha \cap \beta$$

$$2 \begin{cases} \alpha: ax+by+cz=d \\ \beta: a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$$



2. EQUAZIONE PARAMETRICA DELLA RETTA PASSANTE PER $P_0(x_0; y_0; z_0)$ PARALLELA AL VETTORE $\vec{v} = (l; m; n)$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$



N.B.

(l, m, n) RAPPRESENTANO LE COMPONENTI
DI UN VETTORE PARALLELO ALLA RETTA r

ESEMPIO - OSSERVAZIONE

(COME TROVARE LA FORMA PARAMETRICA)

DATA L'EQUAZIONE DELLA RETTA (INTERSEZIONE TRA 2 PIANI)

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -1 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y - 3z - 1 \quad * \\ 2(2y - 3z - 1) - 3y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} * \\ 4y - 6z - 2 - 3y - z = 0 \quad y - 7z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2(7z + 2) - 3z - 1 \\ y = 7z + 2 \quad \times \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 14z + 4 - 3z - 1 \Rightarrow x = 11z + 3 \\ \times \end{cases}$$

SI PONE $z = t$ E SI TROVA L'EQ. PARAM.

$$\begin{cases} x = 11t + 3 \\ y = 7t + 2 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 11t \\ y = 2 + 7t \\ z = 0 + 1t \end{cases} \quad \begin{matrix} P_0(3; 2; 0) \\ v(11; 7; 1) \end{matrix}$$

OSSERVAZIONE:

COME OTTENERE LA DIREZIONE DELLA RETTA
OVVERO IL VETTORE $\vec{v} = (l; m; n)$

DALL' EQUAZIONE DELLA RETTA IN INDIVIDUATA
DALL' INTERSEZIONE DI 2 PIANI:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

$$l = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \quad m = - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \quad n = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

DALL' ESEMPIO PRECEDENTE:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -1 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} l &= \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 9 = 11 \\ m &= - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 6) = 7 \\ n &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1 \end{aligned} \right\} \vec{v} = (11; 7; 1)$$

3. RETTA PER 2 PUNTI

$$P_1(x_1; y_1; z_1) \quad P_2(x_2; y_2; z_2)$$

SI PUO' PENSARE COME UNA RETTA
PASSANTE PER P_1 PARALLELA AL
VETTORE :

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

QUINDI :

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t \end{cases}$$

ESEMPIO

$$P_1(-2; 1; 0) \quad P_2(3; -2; 4)$$

$$P_1 P_2 \quad \begin{cases} x = -2 + (3 - (-2))t \\ y = 1 + (-2 - 1)t \\ z = 0 + (4 - 0)t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 1 - 3t \\ z = 0 + 4t \end{cases}$$

4. EQUAZIONE CANONICA DELLA RETTA

DALL'EQUAZIONE PARAMETRICA

$$\begin{cases} x = x_0 + a t \\ y = y_0 + b t \\ z = z_0 + c t \end{cases}$$

ESPLICITANDO t

$$t = \frac{x - x_0}{a}$$

$$t = \frac{y - y_0}{b}$$

$$t = \frac{z - z_0}{c}$$

UGUAGLIANDO:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

5. EQUAZIONE CANONICA RETTA PER 2 PUNTI

$$P_1(x_1; y_1; z_1) \quad P_2(x_2; y_2; z_2)$$

DALLA FORMA PARAMETRICA:

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)t$$

$$z = z_1 + (z_2 - z_1)t$$

ESPLICITANDO t

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

ESEMPI

1. SCRIVERE L'EQUAZIONE CANONICA DELLA RETTA PASSANTE PER $A(-2;0;1)$ $B(3;-1;2)$

$$r_{AB}: \frac{x+2}{3+2} = \frac{y-0}{-1-0} = \frac{z-1}{2-1}$$
$$\frac{x+2}{5} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

IN FORMA PARAMETRICA:

$$\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 0 - 1t \\ z = 1 + 1t \end{cases}$$

2. DETERMINA I PUNTI DI INTERSEZIONE TRA LE RETTE:

$$r: x = 1+t; \quad y = -1-t; \quad z = 2+3t$$

$$s: x = 2+3v; \quad y = 2+v; \quad z = -6-2v$$

BASTA METTERE A SISTEMA LE 6 EQUAZ.

$$\begin{cases} t = x - 1 \\ y = -1 - x + 1 = -x \\ z = 2 + 3x - 3 = 3x - 1 \\ v = y - 2 \\ x = 2 + 3y - 6 = 3y - 4 \\ z = -6 - 2y + 4 = -2y - 2 \end{cases} *$$

$$* \begin{cases} y = -x \\ x = -3x - 4 \\ z = 3x - 1 \\ z = -2y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = -4 \\ x = -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} y = 1 \\ x = -1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow z = -3 - 1 = -4$$

$$z = -2 - 1 = -4$$

L'INTERSEZIONE
C'E'

$$P(-1; 1; -4)$$

PROVACI TU..

1. DETERMINA I PUNTI DI INTERSEZIONE
DELLE RETTE 2 DI EQUAZIONE:

$$2: x = 2 - 2t; y = -3 - t; z = 2 + 2t$$

$$1: x = -1 + v; y = 2 - v; z = 2 - 2v$$

[NO INTERSEZ.]

2. SCRIVI IN FORMA CANONICA:

$$x = 2 + t; y = -1 - t; z = 2 + 3t$$

$$\left[x - 2 = -y - 1 = \frac{z - 2}{3} \right]$$

3. SCRIVI IN FORMA PARAMETRICA

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y + 4}{5} = \frac{z - 1}{2}$$

$$\left[x = 2 + 3t; y = -4 + 5t; z = 1 + 2t \right]$$

4. SCRIVI IN FORMA CANONICA E IN FORMA PARAMETRICA LA RETTA DI EQUAZIONE:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ x - 3y + z = -2 \end{cases}$$

$$\left[x = \frac{8t+1}{2}; y = \frac{5(t+1)}{2}; z = t \right]$$

5. DETERMINA LE EQUAZIONI, IN FORMA CANONICA, DELLA RETTA PASSANTE PER $A(-2; 2; 3)$ $B(1; -6; 2)$

$$\left[\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-8} = \frac{z-3}{-1} \right]$$

6. DETERMINA L'EQUAZIONE DEL PIANO PASSANTE PER LA RETTA DI EQUAZIONE:

$$x = 3 - 3t; y = -2 + t; z = 2t$$

E PER IL PUNTO DI COORDINATE $(2; -1; 8)$

{SUGGERIMENTO: DETERMINA LE COORDINATE DI 2 PUNTI DI r , QUINDI...}

$$[3x + 11y - z = -13]$$

2. PIANO PER r : $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-1}{4}$

E PER IL PUNTO $P(2; 0; 3)$.

$$22x + 8y - 21z = -19$$

RETTE PARALLELE E ORTOGONALI

DATE 2 RETTE r ED s INDIVIDUATE
DAI VETTORI: $\vec{n} = (l; m; n)$ $\vec{w} = (a; b; c)$

$$r // s \Leftrightarrow \vec{n} // \vec{w} \Leftrightarrow \vec{n} = k \vec{w}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l = k a \\ m = k b \\ n = k c \end{cases} \quad (\text{COMPONENTI} \\ \text{PROPORZIONALI})$$

$$r \perp s \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{w} = 0$$

$$\Leftrightarrow l \cdot a + m \cdot b + n \cdot c = 0$$

(PRODOTTI SCALARE TRAMITE COMPONENTI)

ESEMPIO

DATE LE RETTE DI EQUAZIONE

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{1}$$

$$s: \begin{cases} x = 3 + 1t \\ y = -2 \\ z = -3t \end{cases}$$

$$L: \begin{cases} 2x + y - 4z = -2 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

TROVARE LE POSIZIONI RECIPROCHE:

POSIZIONI RECIPROCHE DI UNA RETTA E DI UN PIANO

DATA UNA RETTA r INDIVIDUATA DA $\vec{n} = (l; m; n)$
ED UN PIANO $d: ax + by + cz = d$

RICORDANDO CHE IL VETTORE INDIVIDUATO
DA d : $\vec{w} = (a; b; c)$ E' PERPENDICOLARE
AD d : $\vec{w} \perp d$

POSSIAMO AFFERMARE CHE:

$$r // d \iff \vec{n} \perp \vec{w} \iff \vec{n} \cdot \vec{w} = 0$$

$$\iff l \cdot a + m \cdot b + n \cdot c = 0$$

E INVECE

$$r \perp d \iff \vec{n} // \vec{w} \iff \vec{n} = k \vec{w}$$

MOLTO SEMPLICE!!

ESEMPIO 1

DATI :

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{3}$$

$$\alpha: 2x - y + 3z = 2$$

$$\beta: x + 3y + kz = -1$$

INDICARE LE POSIZIONI RECIPROCHE
TRA LA RETTA E I 2 PIANI AL VARIARE
DI k