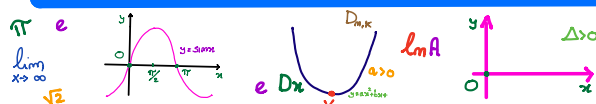


MATEMATICA A COLORI PER TUTTI

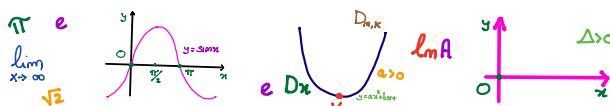
GEOMETRIA
ANALITICA
NELLO
SPAZIO 3
(LA RETTA)

FLIPPED
MATH



WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

MATEMATICA A COLORI PER TUTTI



FLIPPED
MATH

GEOMETRIA ANALITICA
NELLO SPAZIO
BLOG
↙ ↓ ↘

WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

ESEMPIO NOTEVOLE (DAL QUESITO 9 DELLA Maturità SCIENTIFICA 2016)

UNA SFERA, IL CUI CENTRO È IL PUNTO $K(-2; -1; 2)$,
È TANGENTE AL PIANO π AVENTE EQUAZIONE
 $2x - 2y + z - 9 = 0$. QUAL È IL PUNTO DI TANGENZA?
QUAL È IL RAGGIO DELLA SFERA?

PER TROVARE IL PUNTO DI TANGENZA, BASTA INTERSECCARE
IL PIANO TANGENTE CON LA RETTA PASSANTE PER IL
CENTRO K E PERPENDICOLARE AL PIANO π

ESSENDO $\pi: 2x - 2y + z - 9 = 0$ $\vec{v} = (2; -2; 1)$
LA RETTA $\perp \pi$ È INDIVIDUATA ANCHE ESSA
DAL VETTORE $\vec{v}$

PERTANTO :

RETTA PER $K(-2; -1; 2) \parallel \vec{v} (2; -2; 1)$

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

E INTERSECCANDOLA CON $\pi: 2x - 2y + z - 9 = 0$

$$2(-2 + 2t) - 2(-1 - 2t) + 2 + t - 9 = 0$$

$$\Rightarrow -4 + 4t + 2 + 4t + 2 + t - 9 = 0$$

$$\Rightarrow gt = 9 \Rightarrow t = 1$$

SOSTITUENDO NELLA RETTA SI TROVA IL PUNTO DI INTERSEZIONE :

$$\begin{cases} x = -2 + 2 \cdot 1 = 0 \\ y = -1 - 2 \cdot 1 = -3 \\ z = 2 + 1 \cdot 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow T(0; -3; 3)$$

PER TROVARE IL RAGGIO SI PUO' PROCEDERE IN 2 MODI:

- DISTANZA TRA I PUNTI $K(-2; -1; 2)$ $T(0; -3; 3)$

$$r = KT = \sqrt{(0+2)^2 + (-3+1)^2 + (3-2)^2} =$$

$$= \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

- DISTANZA TRA IL CENTRO $K(-2; -1; 2)$ E IL PIANO $\pi: 2x - 2y + z - 9 = 0$

$$R = \frac{|2 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1) + 2 - 9|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{|-4 + 2 + 2 - 9|}{3} = 3$$

ESEMPIO NOTEVOLE (DAL QUESITO 9 DELLA Maturità Scientifica 2016)

DATE LE RETTE:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

E IL PUNTO $P(1; 0; -2)$ DETERMINARE L'EQUAZIONE DEL PIANO PASSANTE PER P E PARALLELO ALLE 2 RETTE.

IL PIANO PASSANTE PER $P(1; 0; -2)$ HA EQUAZIONE:

$$\pi: a(x-1) + b(y-0) + c(z+2) = 0$$

ED E' INDIVIDUATO DAL VETTORE $\vec{w}(a; b; c)$

LA RETTA r_1 E' INDIVIDUATA DAL VETTORE $\vec{n}_1(1; 2; 1)$

PER TROVARE IL VETTORE CHE INDIVIDUA LA RETTA r_2

POSSIAMO TROVARE LA FORMA PARAMETRICA

PONENDO AD ESEMPIO: $x = k$

$$\begin{cases} x = k \\ x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} k + 2k + z - 3 &= 0 & z &= -3k + 3 \\ \rightarrow y &= 2k \end{aligned}$$

QUINDI :

$$\begin{cases} x = 1 \text{ K} \\ y = 2 \text{ K} \\ z = -3 \text{ K} + 3 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_2(1; 2, -3)$$

ADESSO IMPONIAMO LA CONDIZIONE DI PARALLELISMO TRA PIANO E RETTA:

$$\pi // r_1 \Leftrightarrow$$

$$\vec{w} \perp \vec{n}_1 \Leftrightarrow \vec{w} \cdot \vec{n}_1 = 0$$

$$a \cdot 1 + b \cdot 2 + c \cdot 1 = 0 \Rightarrow a + 2b + c = 0$$

ANALOGAMENTE:

$$\pi // r_2 \Leftrightarrow \vec{w} \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{w} \cdot \vec{n}_2 = 0$$

$$a \cdot 1 + b \cdot 2 + c \cdot -3 = 0 \Rightarrow a + 2b - 3c = 0$$

METTIAMO A SISTEMA LE 2 CONDIZIONI:

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ - \quad - \quad - \\ a + 2b - 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -2b$$

$$\begin{matrix} - & - & - \\ - & - & - \\ \hline & & 4c = 0 \end{matrix} \Rightarrow c = 0$$

AL VARIARE DI b TROVO INFINITI VETTORI CHE SODDISFANO LA
CONDIZIONE $\Rightarrow \vec{w}(-2b; b; 0)$
IN PARTICOLARE SE: $b = -1 \Rightarrow \vec{w}(2; -1; 0)$

PERTANTO, IL PIANO RICHIESTO E':

$$\Rightarrow d : 2(x-1) - 1(y-0) + 0(z+2) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 2 - y = 0$$

$$\Rightarrow 2x - y - 2 = 0$$

PROVACI TU...

1. SCRIVI L'EQUAZIONE DEL PIANO $// \vec{j}$
CHE PASSA PER LA RETTA:

$$5x - y + z - 2 = x + 2y - 3z + 5 = 0$$

$$[11x - z + 1 = 0]$$

ESEMPIO

SCRIVI L'EQUAZIONE DEL PIANO PASSANTE
PER LA RETTA: $2x + y - 3z + 2 = 4x - 5y + z - 1 = 0$
PARALLELO ALL'ASSE x .

$$[7y - 7z + 5 = 0]$$

$$d : ax + by + cz = d$$

$$// \vec{x} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow by + cz = d$$

PER TROVARE IL PIANO PASSANTE PER LA RETTA:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z + 2 = 0 \\ 4x - 5y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

CI SERVONO 2 SUOI PUNTI

OCCORRE ESPRIMERE LA RETTA IN FORMA
PARAMETRICA:

$$\begin{cases} y = -2x + 3z - 2 \\ 4x - 5y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 3z - 2 \\ \underbrace{4x + 10x} - \underbrace{15z} + \underbrace{10} + \underbrace{z} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 3z - 2 \\ \underbrace{14x} - \underbrace{14z} + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x + 3z - 2 \\ x = +z - \frac{9}{14} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2z + \frac{9}{7} + 3z - 2 \\ x = +z - \frac{9}{14} \end{cases}$$

POSTO $z = t$

$$\begin{cases} x = -\frac{9}{14} + t \\ y = -\frac{5}{7} + t \\ z = t \end{cases}$$

PER TROVARE 2 PUNTI DELLA RETTA SARA' SUFFICIENTE
ASSEGNARE 2 VALORI OPPORTUNI A t

$$t=0 \quad A\left(-\frac{9}{14}; -\frac{5}{7}; 0\right)$$

$$t=\frac{5}{7} \quad B\left(\frac{1}{14}; 0; \frac{5}{7}\right)$$

ADESSO, ALL' EQUAZIONE DEL PIANO

$$// \vec{n} \Rightarrow a=0 \Rightarrow by+cz=d$$

IMPONIAMO IL PASSAGGIO PER I 2 PUNTI

$$A \Rightarrow -\frac{5}{7}b + 0 = d \Rightarrow b = -\frac{7}{5}d$$

$$B \Rightarrow 0 + \frac{5}{7}c = d \Rightarrow c = \frac{7}{5}d$$

SOSTITUENDO...

$$-\frac{7}{5}dy + \frac{7}{5}dz = d$$

DIVIDENDO PER d

E MOLTIPLICANDO PER -5

$$\Rightarrow 7y - 7z = -5 \Rightarrow 7y - 7z + 5 = 0$$

QUESTO PROBLEMA SI PUÒ RISOLVERE IN
MODO PIÙ SEMPLICE CON IL
METODO DEI FASCI

DATA LA RETTA:

$$r \begin{cases} 2x + y - 3z + 2 = 0 \\ 4x - 5y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

INDIVIDUATA DALL'INTERSEZIONE DI 2 PIANI

IL FASCIO DI PIANI CONTENENTE LA RETTA r
SI OTTIENE CON LA COMBINAZIONE LINEARE
DEI 2 PIANI:

$$\psi: \underline{2x + y - 3z + 2} + k(\underline{4x - 5y + z - 1}) = 0 \quad \times$$

RACCOGLIENDO A FATTORE COMUNE

$$2 \underbrace{(1 + 2k)}_a x + (1 - 5k)y + (k - 3)z + 2 - k = 0$$

IMPONENDO CHE SIA $\parallel \vec{n} \Rightarrow a = 0$

$$\Rightarrow 1 + 2k = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \quad \text{SOSTITUENDO IN } \times$$

$$2x + y - 3z + 2 - \frac{1}{2}(4x - 5y + z - 1) = 0$$

$$\cancel{4x} + 2y - 6z + 4 - \cancel{4x} + 5y - z + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 7y - 7z + 5 = 0$$

PROVACI TU...

1. SCRIVI L'EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER $P(-2;1;0)$ E PERPENDICOLARE AL PIANO $d: 2x - y + 3z = 5$

2. SCRIVI L'EQUAZIONE DEL PIANO PASSANTE PER $A(-2;1;3)$ E PERPENDICOLARE ALLA RETTA:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{4}$$

3. SCRIVI L'EQUAZIONE DEL PIANO PER $A(0;-1;2)$ PERPENDICOLARE ALLA RETTA

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y - 4z = 0 \end{cases}$$

4. SCRIVI L'EQUAZIONE DEL PIANO PER $A(3;2;1)$ E PER LA RETTA.

$$\begin{cases} x + y + 5z - 1 = 0 & d \\ 2x + 3y - z + 2 = 0 & B \end{cases}$$

SUGGERIMENTO:

CON IL METODO DEI FASCI

$$5x + 14y - 24z + 31 = 0$$