

# EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL 2° ORDINE

$$y'' + ay' + by = p(x)$$

SI CONSIDERA L'EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA

$$y'' + ay' + by = 0$$

LA CUI EQUAZIONE CARATTERISTICA E':

$$k^2 + ak + b = 0$$

QUINDI TROVIAMO IL  $\Delta = a^2 - 4b$

E DISTINGUIAMO 3 CASI:

1)  $\Delta > 0 \Rightarrow$  2 RADICI DISTINTE  $k_1$  e  $k_2$

IN TAL CASO:

L'INTEGRALE GENERALE DELL' OMOGENEA ASSOCIATA E' :

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$$

2)  $\Delta = 0 \Rightarrow$  2 RADICI COINCIDENTI

$$k_1 = k_2 = k = -\frac{a}{2}$$

L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE OMOGENEA ASSOCIATA E' :

$$y = e^{kx} (c_1 + c_2 x)$$

3)  $\Delta < 0 \Rightarrow$  2 RADICI COMPLESSE E CONIUGATE

$$K = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{-1 \cdot \sqrt{4b - a^2}}}{2} =$$

$$= -\frac{a}{2} \pm i \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} = \alpha \pm i\beta$$

L'INTEGRALE GENERALE È:

$$y = e^{\alpha x} \left( c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x \right)$$

## ESEMPIO

1. ESEMPIO CON  $\Delta > 0$

$$y'' - y' - 6y = 0$$

EQUAZIONE CARATTERISTICA:

$$k^2 - k - 6 = 0$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$$

$$k_1 = -2$$

$$k_2 = 3$$

LE SOLUZIONI SONO:

QUINDI L'INTEGRALE GENERALE È:

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$$

PER TROVARE  $c_1$  E  $c_2$  OCCORREREBBERO 2 CONDIZIONI INIZIALI.

## 2. ESEMPIO CON $\Delta = 0$ E PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 5 \end{cases}$$

EQUAZIONE CARATTERISTICA:

$$\begin{aligned} k^2 - 6k + 9 &= 0 \Rightarrow \Delta = 0 \\ (k-3)^2 &= 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 3 \end{aligned}$$

L'INTEGRALE GENERALE È:

$$y = e^{3x} (c_1 + c_2 x)$$

PER TROVARE  $c_1$  E  $c_2$  IMPONIAMO LE CONDIZIONI INIZIALI  
(PROBLEMA DI CAUCHY)

$$\begin{aligned} y(0) = 1 &\Rightarrow y(0) = \frac{e^0}{1} (c_1 + \frac{c_2 \cdot 0}{0}) = 1 \\ &\Rightarrow c_1 = 1 \end{aligned}$$

$$y'(0) = 5$$

DOBBIAMO PRIMA  
TROVARE  $y'$

RISCRIVIAMO L'INTEGRALE GENERALE  
SOSTITUENDO  $c_1$  CON 1

$$y = e^{3x} \cdot (1 + c_2 x)$$

DERIVIAMO:

$$y' = e^{3x} \cdot 3 \cdot (1 + c_2 x) + e^{3x} \cdot (c_2)$$

$$y'(0) = e^{3 \cdot 0} \cdot 3 \cdot (1 + c_2 \cdot 0) + e^{3 \cdot 0} \cdot c_2 = 3 + c_2$$

RICORDANDO LA CONDIZIONE:  $y'(0) = 5$

$$\Rightarrow 3 + C_2 = 5 \Rightarrow C_2 = 2$$

QUINDI L'INTEGRALE PARTICOLARE È:

$$y = e^{3x} (1 + 2x)$$

### 3. ESEMPIO CON $\Delta < 0$

$$y'' + 6y' + 10y = 0$$

EQUAZIONE CARATTERISTICA:

$$k^2 + 6k + 10 = 0$$

$$k = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = -3 \pm i$$

$$\frac{\Delta}{4} = 9 - 10 = -1$$

$$\alpha = -3$$

$$\beta = 1$$

L'INTEGRALE GENERALE È:

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

$$y = e^{-3x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

PROVACI SUBITO TU...

1.  $y'' - 4y' = 0$

$$y = c_1 + c_2 e^{4x}$$

2.  $4y'' - 12y' + 9y = 0$

$$y = e^{\frac{3}{2}x} (c_1 + c_2 x)$$

3.  $y'' + 16y = 0$

$$y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x$$

4.  $y'' - 2y' - 3y = 0$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$$

5.  $y'' - 6y' + 10y = 0$

$$y = e^{3x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

6.  $y'' - 4y' = 0 \quad y(0) = 3 \quad y'(0) = 12$

$$y = 3e^{4x} + 4$$

7.  $y'' - 10y' + 25y = 0 \quad y(1) = 0 \quad y'(1) = -e^5$

$$y = e^{5x} (1 - x)$$