

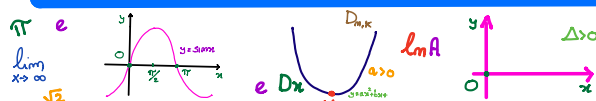
MATEMATICA A COLORI PER TUTTI

EQUAZIONI
DIFFERENZIALI
DEL 2° ORDINE

NON OMOGENEE 2

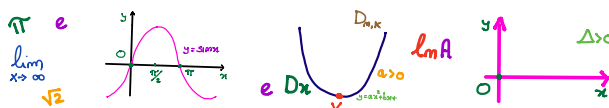
(METODO DELLE SOMIGLIANZE)

FLIPPED
MATH



WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

MATEMATICA A COLORI PER TUTTI



FLIPPED
MATH

EQUAZIONI
DIFFERENZIALI
BLOG



WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE NON OMOGENEE

$$y'' + ay' + by = p(x)$$

LA SOLUZIONE SI TROVA SOMMANDO
2 SOLUZIONI PARTICOLARI

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

$y_1(x)$ È LA SOLUZIONE DELL'OMOGENEA
ASSOCIATA

$y_2(x)$ È L'INTEGRALE PARTICOLARE

CHE SI PUÒ RICAVERE
SEGUENDO UNO SCHEMA

IN BASE ALLA FORMA DI $p(x)$
ED AI VALORI DI a E b

OVVERO UTILIZZANDO IL

METODO DELLE SOMIGLIANZE

METODO DELLE SOMIGLIANZE

3 CASI :

1° CASO :

$p(x)$ È UN POLINOMIO DI GRADO m

2° CASO :

$$p(x) = A \cdot e^{\alpha x}$$

3° CASO :

$$p(x) = C \sin \beta x + D \cos \beta x$$

1° CASO: $p(x)$ È UN POLINOMIO DI GRADO m
SCHEMA

A) SE $b \neq 0 \Rightarrow y_2(x)$ POLINOMIO
DI GRADO m

B) SE $b = 0 \wedge a \neq 0 \Rightarrow y_2(x)$
POLINOMIO DI
GRADO $m+1$

C) SE $b = a = 0 \Rightarrow y_2(x)$ POLINOMIO
DI GRADO $m+2$

ESEMPIO

$$y'' - y = x + 1$$

EQUAZIONE OMOGENEA: $y'' - y = 0$
($y'' + ay' + b = 0$) $a = 0 \quad b \neq 0$

EQUAZIONE CARATTERISTICA : $k^2 - 1 = 0$

$k = \pm 1$ 2 SOLUZIONI DISTINTE

INTEGRALE GENERALE:

$$y(x) = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$$

QUINDI: $y_1(x) = c_1 e^{1x} + c_2 e^{-x}$

ADESSO DOBBIAMO TROVARE L'INTEGRALE PARTICOLARE $y_2(x)$ SEGUENDO LO SCHEMA

$$p(x) = x + 1 \quad \text{POLINOMIO DI GRADO 1}$$

$$b \neq 0 \Rightarrow y_2(x) \text{ POLINOMIO DI GRADO 1}$$

$$y_2(x) = m x + q$$

m E q SI TROVANO SOSTITUENDO NELL'EQUAZIONE $y'' - y = x + 1$

$$y_2'(x) = m$$

$$y_2''(x) = 0$$

$$\Rightarrow 0 - \underline{m x - q} = \underline{1 x + 1}$$

$$\begin{cases} -m = 1 \\ -q = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ q = -1 \end{cases} \Rightarrow y_2(x) = -1x - 1$$

L'INTEGRALE GENERALE E':

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x - 1$$

PROVACI TU...

1. $y'' - 2y' - 3y = 3$ $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - 1$

2. $y'' + y = 4$ $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 4$

3. $y'' - 3y' + 2y = x^2$ $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$

4. $y'' - y = 2x^2 + 1$ $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 2x^2 - 5$

5. $y'' + 4y = 4x^2 + 4x + 6$

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + x^2 + x + 1$$

6. $y'' - 6y' = 2x + 1$ CON $y(0) = 1$ $y'(0) = \frac{2}{3}$

$$y = \frac{1}{6} e^{6x} - \frac{1}{6} x^2 - \frac{2}{9} x + \frac{5}{6}$$

7. $y'' + y = x$ $y'(0) = 0$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$y = -\frac{\pi}{2} \sin x + x$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE NON OMOGENEE

$$y'' + ay' + by = p(x)$$

SECONDO CASO: $p(x) = A \cdot e^{dx}$

SI DISTINGUONO 3 SOTTOCASI

A) SE d NON È UNA RADICE DELLA EQUAZIONE CARATTERISTICA

ALLORA:

L'INTEGRALE PARTICOLARE È:

$$y_2(x) = B e^{dx}$$

B) SE d È UNA RADICE SEMPLICE ($\Delta > 0$) DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA

ALLORA

L'INTEGRALE PARTICOLARE È:

$$y_2(x) = B \underset{\uparrow}{x} e^{dx}$$

c) SE Δ È UNA RADICE DOPPIA ($\Delta=0$)
DELL' EQUAZIONE CARATTERISTICA
ALLORA
L'INTEGRALE PARTICOLARE È

$$y_2(x) = B x^2 e^{\lambda x}$$

N.B. LA B SI TROVA SOSTITUENDO
 y , y' E y'' NELL'EQUAZIONE
DIFFERENZIALE.

ESEMPIO

$$y'' + y' - 2y = 3e^{-2x}$$

CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE CARATTERISTICA:

$$k^2 + k - 2 = 0 \quad \Delta = 1 + 8 = 9 > 0$$

$$\Rightarrow k_1 = -2 \quad \vee \quad k_2 = 1$$

L'INTEGRALE DELL' OMogenea
ASSOCIATA È:

$$y_1(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{1x}$$

ADESSO CERCHIAMO L'INTEGRALE
PARTICOLARE:

$$p(x) = 3e^{-2x} \quad q = -2$$

ESSENDO $q = -2$ RADICE SEMPLICE
DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA

LA SOLUZIONE PARTICOLARE SARÀ:

$$y_2(x) = Bx e^{-2x}$$

TROVIAMO B SOSTITUENDO NELL'EQUAZIONE

$$y'' + y' - 2y = 3e^{-2x}$$

TROVIAMO LE DERIVATE DI $y_2(x)$

$$y_2(x) = Bx \cdot e^{-2x}$$

$$\begin{aligned} y_2' &= B \cdot 1 \cdot e^{-2x} + B \cdot x \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = \\ &= B e^{-2x} - 2Bx e^{-2x} \end{aligned}$$

TROVIAMO LA DERIVATA SECONDA

$$\begin{aligned}
 y_2'' &= B e^{-2x} \cdot (-2) - 2B \cdot 1 \cdot e^{-2x} + \\
 &\quad - 2Bx \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = \\
 &= -2B e^{-2x} - 2B e^{-2x} + 4Bx e^{-2x} = \\
 &= -4B e^{-2x} + 4Bx e^{-2x}
 \end{aligned}$$

SOSTITUENDO NELL'EQUAZIONE DIFFERENZ.

$$\underbrace{-4B e^{-2x}} + \underbrace{4Bx e^{-2x}} + \underbrace{B e^{-2x}} - \underbrace{2Bx e^{-2x}} +$$

$$\underbrace{-2Bx e^{-2x}} = \underbrace{3 e^{-2x}} \quad \text{IMPORIAMO:}$$

$$\Rightarrow -3B e^{-2x} = 3 e^{-2x} \Rightarrow B = -1$$

QUINDI : $y_2(x) = -1 x e^{-2x}$

L'INTEGRALE GENERALE È:

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x - x e^{-2x}$$

PROVACI TU...

1. $y'' - y = e^{-x}$ $y = \left(c_1 - \frac{1}{2}x\right)e^{-x} + c_2 e^x$

2. $y'' - 3y' + 2y = e^x$ $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - x e^x$

3. $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$ $y = c_1 e^x + (c_2 + 3x)e^{2x}$

4. $y'' - 4y = e^{2x}$ $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{4}x e^{2x}$

PROBLEMA DI CAUCHY

5. $2y'' - 5y' + 2y = 3e^{2x}$ con $y(0)=1$ $y'(0)=3$

$$y = e^{2x}(x+1)$$

6. $y'' - 4y = 4e^{-2x}$ con $y(0)=-1$ $y'(0)=1$