3° CASO:

$$y'' + ay' + by = C \sin\beta x + D \cos\beta x$$

E SI DIVIDONO 2 SOTTOCASI

A) SE $i\beta$ NON È RADICE DELLA EQUAZIONE CARATTERISTICA

ALLORA L'INTEGRALE PARTICOLARE È:

$$y_2(x) = A \operatorname{sen}\beta x + B \cos\beta x$$

B) SE $i\beta$ È RADICE DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA

ALLORA L'INTEGRALE PARTICOLARE È:

$$y_2(x) = x\left(A \sin\beta x + B \cos\beta x\right)$$

N.B. ANCHE IN QUESTO CASO A E B SI TROVANO SOSTITUENDO y, y' E y'' NELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE.

ESEMPIO

$$y'' + 4y = \sin 2x \qquad \beta = 2$$

RISOLVIAMO PRIMA L'EQUAZIONE OMOGENEA:

$$y'' + 4y = 0$$

CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE CARATTERISTICA:

$$K^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow K^2 = -4 \qquad K = \pm 2i$$

$$\alpha = 0 \qquad \beta = 2$$

QUINDI LA SOLUZIONE E':

$$y_1(x) = e^{0x}\left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x\right)$$

$$= c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

ADESSO TROVIAMO LA SOLUZIONE PARTICOLARE:

$$p(x) = \sin 2x \qquad \beta = 2$$

ESSENDO $2i$ RADICE DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA, L'INTEGRALE PARTICOLARE E':

$$y_2(x) = x\left(A\sin 2x + B\cos 2x\right)$$

TROVIAMO A E B SOSTITUENDO LE DERIVATE NELL' EQUAZIONE DIFFERENZIALE

$$y_2' = 1\cdot\left(A\sin 2x + B\cos 2x\right) + x\left(A\cos 2x\cdot 2 + \right.$$
$$\left. - B\sin 2x\cdot 2\right) =$$
$$= A\sin 2x + B\cos 2x + 2Ax\cos 2x +$$
$$-2Bx\sin 2x$$

$$y_2'' = \underline{A\cos 2x\cdot 2} - \underline{B\sin 2x}\cdot 2 + \underline{2A\cdot 1\cdot\cos 2x} +$$
$$-2Ax\sin 2x\cdot 2 - \underline{2B\cdot 1\sin 2x} - 2Bx\cos 2x\cdot 2 =$$
$$= 4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 4Ax\sin 2x +$$
$$-4Bx\cos 2x$$

SOSTITUENDO NELL' EQUAZIONE DIFFERENZIALE: $y'' + 4y = \sin 2x$

$$4A\cos 2x - 4B\sin 2x - \cancel{4Ax\sin 2x} +$$

$$-4Bx\cancel{\cos 2x} + 4\left(\cancel{Ax\sin 2x} + Bx\cancel{\cos 2x}\right) =$$

$$= \sin 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4B = 1 \\ 4A = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B = -\frac{1}{4} \\ A = 0 \end{cases}$$

L'INTEGRALE GENERALE È:

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{4} x \cos 2x$$

ADESSO PROVACI TU...

1. $y'' - 3y' = \sin x + \cos x$

$y = c_1 + c_2 e^{3x} - \frac{2}{5}\sin x + \frac{1}{5}\cos x$

2. $y'' + y = \sin x$ $\quad y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$

3. $y'' + y' = \sin x + \cos x$ $\quad y = c_1 + c_2 e^{-x} - \cos x$

4. $y'' - 2y' + y = 2(\cos x + \sin x)$

$y = (c_1 + c_2 x) e^{x} + \cos x - \sin x$

PROBLEMA DI CAUCHY

5. $4y'' + 9y = 5\sin x$ con $y(0) = 0$ $\quad y'(0) = \frac{5}{2}$

$y = \sin \frac{3}{2} x + \sin x$

6. $y'' + 4y = 4\sin 2x$ $\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ $\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{2}$

$y = -\frac{3}{4}\sin 2x - x\cos 2x$