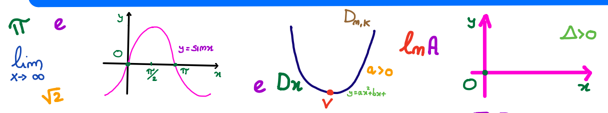
MATEMATICA A COLORI PER TUTTI

MATURITÀ SCIENTIFICA 2016

PROBLEMA 1

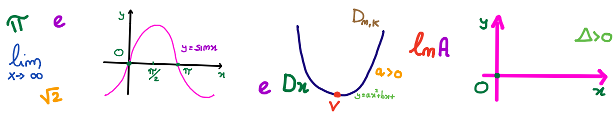
(PROBLEMA DI REALTÀ)

FLIPPED MATH



WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

MATEMATICA A COLORI PER TUTTI



FLIPPED MATH

MATURITÀ SCIENTIFICA 2016

BLOG

WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

L'amministratore di un piccolo condominio deve installare un nuovo serbatoio per il gasolio da riscaldamento. Non essendo soddisfatto dei modelli esistenti in commercio, ti incarica di progettarne uno che risponda alle esigenze del condominio.

[redacted]

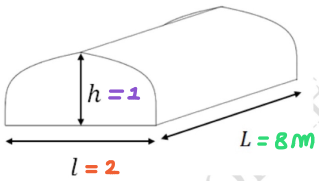


Figura 1

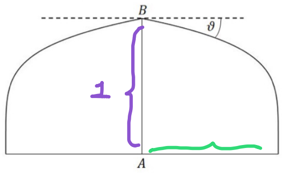


Figura 2

IL TESTO

Allo scopo di darti le necessarie informazioni, l'amministratore ti fornisce il disegno in figura 1, aggiungendo le seguenti indicazioni:

- la lunghezza L del serbatoio deve essere pari a otto metri;
- la larghezza l del serbatoio deve essere pari a due metri;
- l'altezza h del serbatoio deve essere pari a un metro;
- il profilo laterale (figura 2) deve avere un punto angoloso alla sommità, per evitare l'accumulo di ghiaccio durante i mesi invernali, con un angolo $\vartheta \geq 10°$;
- la capacità del serbatoio deve essere pari ad almeno 13 m^3, in modo da garantire al condominio il riscaldamento per tutto l'inverno effettuando solo due rifornimenti di gasolio;
- al centro della parete laterale del serbatoio, lungo l'asse di simmetria (segmento AB in figura 2) deve essere installato un indicatore graduato che riporti la percentuale di riempimento V del volume del serbatoio in corrispondenza del livello z raggiunto in altezza dal gasolio.

MATURITÀ SCIENTIFICA A COLORI PER TUTTI

LE CONSEGNE:

1. Considerando come origine degli assi cartesiani il punto A in figura 2, individua tra le seguenti famiglie di funzioni quella che meglio può descrivere il profilo laterale del serbatoio per $x \in [-1, 1]$, k intero positivo, motivando opportunamente la tua scelta:

$$f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{k}}$$

$$f(x) = -6|x|^3 + 9kx^2 - 4|x| + 1$$

$$f(x) = cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$$

2. Determina il valore di k che consente di soddisfare i requisiti richiesti relativamente all'angolo ϑ e al volume del serbatoio.
3. Al fine di realizzare l'indicatore graduato, determina l'espressione della funzione $V(z)$ che associa al livello z del gasolio (in metri) la percentuale di riempimento V del volume da riportare sull'indicatore stesso.

Quando consegni il tuo progetto, l'amministratore obietta che essendo il serbatoio alto un metro, il valore z del livello di gasolio, espresso in centimetri, deve corrispondere alla percentuale di riempimento: cioè, ad esempio, se il gasolio raggiunge un livello z pari a 50 cm vuol dire che il serbatoio è pieno al 50%; invece il tuo indicatore riporta, in corrispondenza del livello 50 cm, una percentuale di riempimento 59,7%.

[redacted]

4. Illustra gli argomenti che puoi usare per spiegare all'amministratore che il suo ragionamento è sbagliato; mostra anche qual è, in termini assoluti, il massimo errore che si commette usando il livello z come indicatore della percentuale di riempimento, come da lui suggerito, e qual è il valore di z in corrispondenza del quale esso si verifica.

MATURITÀ SCIENTIFICA A COLORI PER TUTTI

INIZIAMO AD ANALIZZARE IL PUNTO 1

1. Considerando come origine degli assi cartesiani il punto A in figura 2, individua tra le seguenti famiglie di funzioni quella che meglio può descrivere il profilo laterale del serbatoio per $x \in [-1, 1]$, k intero positivo, motivando opportunamente la tua scelta:

$$f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{k}}$$

$$f(x) = -6|x|^3 + 9kx^2 - 4|x| + 1$$

$$f(x) = cos\left(\frac{\pi}{2}x^k\right)$$

CONSIDERIAMO LE 2 FIGURE:

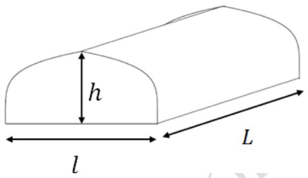


Figura 1

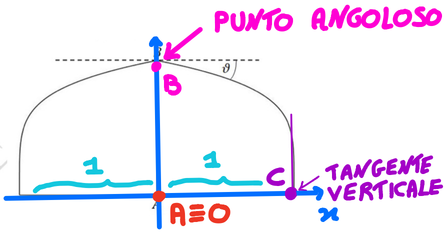


Figura 2

MATURITÀ SCIENTIFICA A COLORI PER TUTTI

LA PRESENZA DI UN PUNTO ANGOLOSO (B)

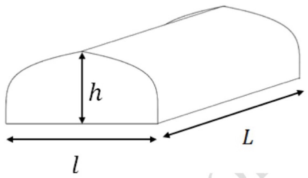


Figura 1

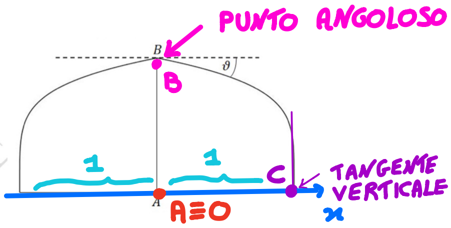


Figura 2

SUGGERISCE UNA FUNZIONE CON VALORE ASSOLUTO

LA PRESENZA DI UN PUNTO A TANGENTE VERTICALE (C)

SUGGERISCE UNA FUNZIONE CON RADICE

PERTANTO SI TRATTA DELLA PRIMA FUNZIONE:

$$f(x) = (1 - |x|)^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{1 - |x|}$$

WWW. CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

MATURITÀ SCIENTIFICA A COLORI PER TUTTI

ADESSO ANALIZZIAMO IL PUNTO 2

2. Determina il valore di k che consente di soddisfare i requisiti richiesti relativamente all'angolo ϑ e al volume del serbatoio.

- il profilo laterale (figura 2) deve avere un punto angoloso alla sommità, per evitare l'accumulo di ghiaccio durante i mesi invernali, con un angolo $\vartheta \geq 10°$;
- la capacità del serbatoio deve essere pari ad almeno 13 m^3, in modo da garantire al condominio il riscaldamento per tutto l'inverno effettuando solo due rifornimenti di gasolio;

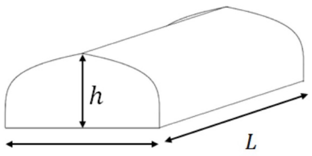


Figura 1

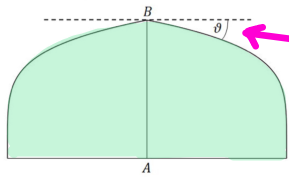


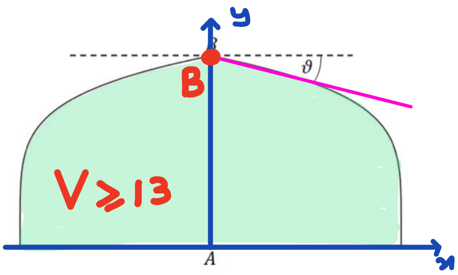
Figura 2

$\vartheta \geq 10°$

$V \geq 13$

[redacted]

MATURITÀ SCIENTIFICA A COLORI PER TUTTI



CONSIDERANDO LA TANGENTE IN B

$f'(0) = m_t = \tan\vartheta$

DOBBIAMO IMPORRE

$\vartheta \geq 10°$

VOLUME DEL SERBATOIO:

$V = A_s \cdot L$

SAPPIAMO CHE $L = 8\,m$

$$A_s = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow V = 8 \cdot 2\int_0^1 f(x)\,dx = 16\int_0^1 f(x)\,dx$$

ESSENDO:

$$f(x) = (1-|x|)^{\frac{1}{k}}$$

[redacted]

MATURITÀ SCIENTIFICA A COLORI PER TUTTI

$f(x) = \left(1-|x|\right)^{\frac{1}{k}}$

NEL NOSTRO CASO $x>0$ QUINDI: $f(x) = (1-x)^{\frac{1}{k}}$

DERIVANDO: $D\, f(x)^{\alpha} = \alpha\, f(x)^{\alpha-1} \cdot f'(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{k}(1-x)^{\frac{1}{k}-1} \cdot (-1) = -\frac{1}{k}(1-x)^{\frac{1-k}{k}}$$

QUINDI: $f'(0) = -\frac{1}{k}(1)^{\frac{1-k}{k}} = -\frac{1}{k}$

RICORDANDO CHE:

$$f'(0) = m_t = \tan\vartheta = -\frac{1}{k} \qquad \vartheta \geq 10° \qquad \tan(-10°) \simeq -0{,}176\ldots$$

AD ESEMPIO $k=5$ $\quad \frac{1}{5} = 0{,}2 \geq 0{,}176$

QUINDI K PUÒ ASSUMERE COME VALORI 2, 3, 4, 5

MATURITÀ SCIENTIFICA A COLORI PER TUTTI

DOBBIAMO ADESSO IMPORRE LA SECONDA CONDIZIONE:

$$V = 16\int_0^1 f(x)\,dx \geq 13 \qquad f(x) = (1-x)^{\frac{1}{k}}$$

$$\int (1-x)^{\frac{1}{k}}\,dx = -\int (1-x)^{\frac{1}{k}} \cdot (-1)\,dx = -\frac{(1-x)^{\frac{1}{k}+1}}{\frac{1}{k}+1} + c$$

$\int f(x)^{\alpha} \cdot f'(x)\,dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$

$$\Rightarrow V = -16\left[\frac{(1-x)^{\frac{1+k}{k}}}{\frac{1+k}{k}}\right]_0^1 = -16\left[\cancel{\frac{(1-1)^{\frac{1+k}{k}}}{\frac{1+k}{k}}} - \frac{(1-0)^{\frac{1+k}{k}}}{\frac{1+k}{k}}\right] = 16\,\frac{1}{\frac{1+k}{k}} = 16\,\frac{k}{1+k} \geq 13$$

$$\Rightarrow 16k \geq 13 + 13k \Rightarrow 3k \geq 13 \Rightarrow k \geq \frac{13}{3} \simeq 4{,}\bar{3}$$

RICORDANDO LA PRIMA CONDIZIONE: $k = 2, 3, 4, 5$

POSSIAMO CONCLUDERE CHE $k=5$ $\qquad f(x) = \left(1-|x|\right)^{\frac{1}{5}}$

MATURITÀ SCIENTIFICA A COLORI PER TUTTI

ADESSO ANALIZZIAMO IL PUNTO 3

3. Al fine di realizzare l'indicatore graduato, determina l'espressione della funzione $V(z)$ che associa al livello z del gasolio (in metri) la percentuale di riempimento V del volume da riportare sull'indicatore stesso.

RICORDANDO CHE :

- al centro della parete laterale del serbatoio, lungo l'asse di simmetria (segmento AB in figura 2) deve essere installato un indicatore graduato che riporti la percentuale di riempimento V del volume del serbatoio in corrispondenza del livello z raggiunto in altezza dal gasolio.

PARTENDO DALLA FUNZIONE TROVATA: $f(x) = (1-|x|)^{\frac{1}{5}}$

DOBBIAMO ASSOCIARE AL LIVELLO z DEL GASOLIO LA PERCENTUALE DI RIEMPIMENTO V DEL VOLUME ; OVVERO, DOBBIAMO DETERMINARE LA FUNZIONE $V(z)$ CHE RAPPRESENTA IL VOLUME DI LIQUIDO OCCUPATO IN FUNZIONE DELL'ALTEZZA z.

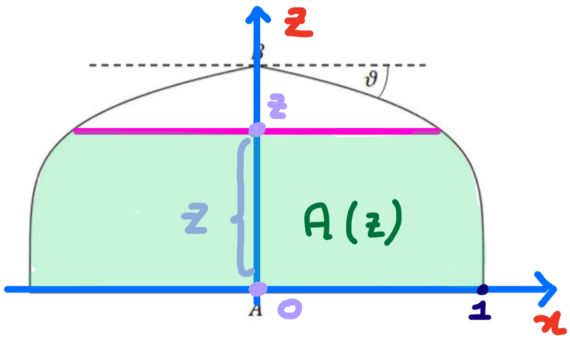
OCCORRE QUINDI SVOLGERE UN INTEGRALE SULL'ASSE DELLE ORDINATE z PER DETERMINARE L'AREA $A(z)$ DELLA SEZIONE VERTICALE DEL SERBATOIO

WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

MATURITÀ SCIENTIFICA A COLORI PER TUTTI

PRECISAMENTE DOBBIAMO TROVARE :

$$v(z) = \frac{V(z)}{V} = \frac{8 \cdot A(z)}{V}$$



PER TROVARE $A(z)$ DOBBIAMO DETERMINARE LA FUNZIONE INVERSA, LIMITANDO $0 \leq x \leq 1$ AFFINCHÉ $f(x)$ SIA INVERTIBILE

$$z = (1-x)^{\frac{1}{5}}$$

ELEVANDO ALLA QUINTA

$$(z)^5 = \left[(1-x)^{\frac{1}{5}}\right]^5 \Rightarrow z^5 = (1-x) \Rightarrow x = 1-z^5$$

$$\Rightarrow A(z) = 2\int_0^z (1-z^5)\,dz = 2\left[z - \frac{z^6}{6}\right]_0^z = 2\left(z - \frac{z^6}{6}\right)$$

WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

$$A(z) = 2\left(z - \frac{z^6}{6}\right)$$

[redacted]

$$V(z) = 8 \cdot A(z) = 16\left(z - \frac{z^6}{6}\right)$$

RICORDANDO CHE:

$$V = 16\,\frac{k}{1+k} \overset{k=5}{=} 16\,\frac{5}{1+5} = \cancel{16}^{\,8}\,\frac{5}{\cancel{6}_{\,3}} = \frac{40}{3}$$

$$\Rightarrow\ v(z) = \frac{V(z)}{V} = \frac{16\left(z - \frac{z^6}{6}\right)}{\frac{40}{3}} = \cancel{16}^{\,2}\,\frac{3}{\cancel{40}_{\,5}}\left(z - \frac{z^6}{6}\right) = \frac{6}{5}\left(z - \frac{z^6}{6}\right)$$

IN PERCENTUALE

$$v(z) = \frac{6}{5}\left(z - \frac{z^6}{6}\right) \cdot 100\,\%$$

MATURITÀ SCIENTIFICA A COLORI PER TUTTI

INFINE:

Quando consegni il tuo progetto, l'amministratore obietta che essendo il serbatoio alto un metro, il valore z del livello di gasolio, espresso in centimetri, deve corrispondere alla percentuale di riempimento: cioè, ad esempio, se il gasolio raggiunge un livello z pari a 50 cm vuol dire che il serbatoio è pieno al 50%; invece il tuo indicatore riporta, in corrispondenza del livello 50 cm, una percentuale di riempimento 59,7%.

4. Illustra gli argomenti che puoi usare per spiegare all'amministratore che il suo ragionamento è sbagliato; mostra anche qual è, in termini assoluti, il massimo errore che si commette usando il livello z come indicatore della percentuale di riempimento, come da lui suggerito, e qual è il valore di z in corrispondenza del quale esso si verifica.

PER L'AMMINISTRATORE: $v(50cm) = 0{,}5 \cdot 100\% = 50\%$

[redacted]

PER L'INDICATORE:

$$v(50cm) = \frac{6}{5}\left(0{,}5 - \frac{0{,}5^6}{6}\right) \cdot 100\,\% = 59{,}70\,\%$$

WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

MATURITÀ SCIENTIFICA A COLORI PER TUTTI

4. Illustra gli argomenti che puoi usare per spiegare all'amministratore che il suo ragionamento è sbagliato; mostra anche qual è, in termini assoluti, il massimo errore che si commette usando il livello z come indicatore della percentuale di riempimento, come da lui suggerito, e qual è il valore di z in corrispondenza del quale esso si verifica.

L'ERRORE NEL RAGIONAMENTO DELL'AMMINISTRATORE È SEMPLICEMENTE DOVUTO AL FATTO CHE IL SERBATOIO NON HA UNA LARGHEZZA COSTANTE

L'ERRORE SI PUÒ STIMARE COME DIFFERENZA TRA IL VOLUME ESPRESSO DALLA FUNZIONE $v(z)$ APPENA DETERMINATA, E LA FUNZIONE

$w(z) = z$ (PIÙ SEMPLICE MA IMPRECISA)

$$E(z) = v(z) - z = \frac{6}{5}\left(z - \frac{z^6}{6}\right) - z$$

MATURITÀ SCIENTIFICA A COLORI PER TUTTI

$$E(z) = \frac{6}{5}\left(z - \frac{z^6}{6}\right) - z = \frac{6}{5} z - \frac{1}{5} z^6 - z = \frac{1}{5} z - \frac{1}{5} z^6$$

IL MASSIMO ERRORE SI OTTIENE SEMPLICEMENTE CON IL METODO DELLA DERIVATA PRIMA

$$E'(z) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} 6 z^5 = \frac{1}{5} - \frac{6}{5} z^5$$

$$E'(z) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\cancel{5}} - \frac{6}{\cancel{5}} z^5 = 0 \Rightarrow z^5 = \frac{1}{6} \Rightarrow z = \sqrt[5]{\frac{1}{6}}$$

INFINE:

$$E\left(\sqrt[5]{\frac{1}{6}}\right) = \frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{1}{6}} - \frac{1}{5}\left(\sqrt[5]{\frac{1}{6}}\right)^6 = \frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{1}{6}} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}\sqrt[5]{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\cancel{5}}\cdot\underset{1-\frac{1}{6}}{\frac{\cancel{5}}{6}}\sqrt[5]{\frac{1}{6}} =$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt[5]{\frac{1}{6}}$$