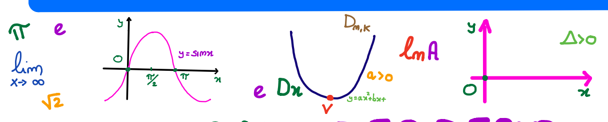
MATEMATICA A COLORI PER TUTTI

MATURITÀ SCIENTIFICA 2017

PROBLEMA 2

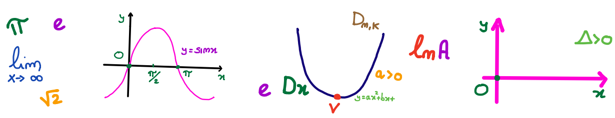
FLIPPED MATH

PRIMA PARTE



WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

MATEMATICA A COLORI PER TUTTI



MATURITÀ SCIENTIFICA 2017

BLOG

FLIPPED MATH

WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

MATURITÀ SCIENTIFICA A COLORI PER TUTTI

Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo $T = 4$ il cui grafico, nell'intervallo $[0; 4]$, è il seguente:

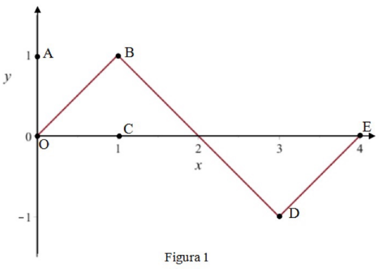


Figura 1

f PERIODICA DI PERIODO $T = 4$

POSSIAMO DIRE SUBITO CHE LA FUNZIONE È CONTINUA IN $\mathbb{R}$

[redacted]

Come si evince dalla figura 1, i tratti OB, BD, DE del grafico sono segmenti i cui estremi hanno coordinate: $O(0,0)$, $B(1,1)$, $D(3,-1)$, $E(4,0)$.

1) Stabilisci in quali punti del suo insieme di definizione la funzione f è continua e in quali è derivabile e verifica l'esistenza dei limiti: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$; qualora esistano, determinane il valore.

Rappresenta inoltre, per $x \in [0; 4]$, i grafici delle funzioni:

$$g(x) = f'(x)$$

$$h(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

MATURITÀ SCIENTIFICA A COLORI PER TUTTI

PUNTO 1

[redacted]

1) Stabilisci in quali punti del suo insieme di definizione la funzione f è continua e in quali è derivabile e verifica l'esistenza dei limiti: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$; qualora esistano, determinane il valore.

DERIVABILITÀ

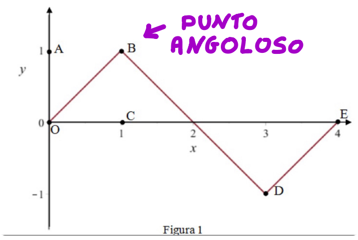


Figura 1

LA FUNZIONE PRESENTA PUNTI ANGOLOSI; AD ESEMPIO IL PUNTO $B(1;1)$; IN ESSI LA FUNZIONE È CONTINUA MA NON DERIVABILE;

INFATTI IN TALI PUNTI HA 2 TANGENTI E QUINDI 2 DERIVATE

$$f'(x_0^-) \neq f'(x_0^+) \qquad \lim_{x\to x_0^-} f'(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$$

WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

MATURITÀ SCIENTIFICA A COLORI PER TUTTI

e verifica l'esistenza dei limiti: $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$; qualora esistano, determinane il valore.

ESSENDO LA FUNZIONE PERIODICA PER $x \to +\infty$ NON PUÒ TENDERE AD UN VALORE PRECISO; PERTANTO: $\nexists \lim_{x \to +\infty} f(x)$

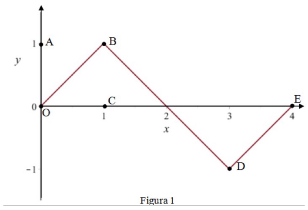


Figura 1

INVECE:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} f(x) \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} = 0$$

$f(x)$ LIMITATA IN $[-1; -1]$

WWW. CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

MATURITÀ SCIENTIFICA A COLORI PER TUTTI

Rappresenta inoltre, per $x \in [0; 4]$, i grafici delle funzioni:

$$g(x) = f'(x)$$

$$h(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

RAPPRESENTIAMO LA FUNZIONE $g(x) = f'(x)$

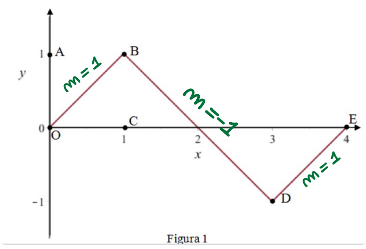


Figura 1

SI PUÒ OSSERVARE CHE I SEGMENTI OB E DE HANNO PENDENZA 1 $(m=1)$

E IL SEGMENTO BD HA PENDENZA -1 $(m=-1)$

TRATTANDOSI DI SEGMENTI, LE TANGENTI AL GRAFICO COINCIDONO CON I SEGMENTI STESSI, PERTANTO, RICORDANDO CHE LA DERIVATA PRIMA IN UN PUNTO È UGUALE AL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA TANGENTE, POSSIAMO TROVARE $g(x)$

WWW. CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM

MATURITÀ SCIENTIFICA A COLORI PER TUTTI

PER $x \in [0; 4]$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE: } 0 < x < 1 \ \vee \ 3 < x < 4 \\ -1 & \text{SE: } 1 < x < 3 \end{cases}$$

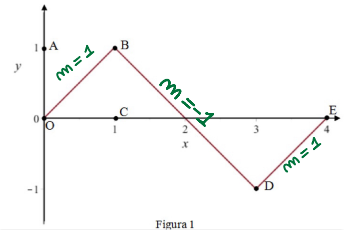


Figura 1

SI POTREBE ANCHE SCRIVERE LA LEGGE CHE DEFINISCE $f(x)$

DETERMINANDO LE EQUAZIONI DEI SINGOLI SEGMENTI

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{SE: } 0 \le x \le 1 \\ -x + 2 & \text{SE: } 1 < x \le 3 \\ x - 4 & \text{SE: } 3 < x \le 4 \end{cases}$$

RETTA CON $m = 1$ PASSANTE PER $(0; 0)$

RETTA CON $m = -1$ PASSANTE PER $(2; 0)$

RETTA CON $m = 1$ PASSANTE PER $(4; 0)$

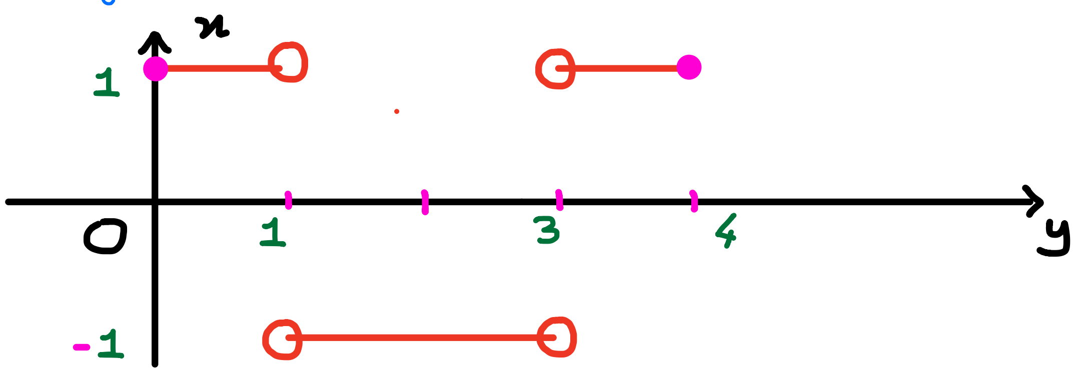
E RICAVARE FACILMENTE LE DERIVATE

MATURITÀ SCIENTIFICA A COLORI PER TUTTI

POSSIAMO RAPPRESENTARE IL GRAFICO DI $g(x)$

PER $x \in [0; 4]$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE: } 0 \le x < 1 \ \vee \ 3 < x \le 4 \\ -1 & \text{SE: } 1 < x < 3 \end{cases}$$



MATURITÀ SCIENTIFICA A COLORI PER TUTTI

PASSIAMO ADESSO ALLA FUNZIONE INTEGRALE

$$h(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

RICORDANDO CHE LA FUNZIONE INTEGRALE RAPPRESENTA UN' AREA,

E CHE $f(x)$ E' DEFINITA DA 3 LEGGI, OCCORRE STUDIARE 3 CASI:

1° CASO: $0\le x\le 1$ $\quad f(x)=x$

$$h(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x t\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x=\frac{x^2}{2}$$

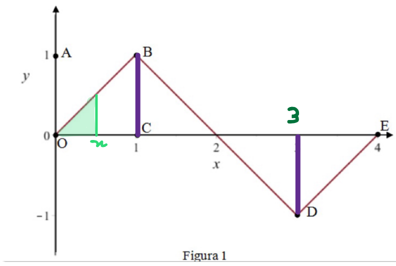


Figura 1

MATURITÀ SCIENTIFICA A COLORI PER TUTTI

2° CASO: $1< x\le 3$ $\quad f(x)=-x+2$

$$h(x)=\underset{A_1}{\frac{1}{2}}+\int_1^x f(t)\,dt=\frac{1}{2}+\int_1^x -t+2\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}+\left[-\frac{t^2}{2}+2t\right]_1^x=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}+2x-\left(-\frac{1}{2}+2\right)=$$

$$=-\frac{x^2}{2}+2x-1$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-2=-1$$

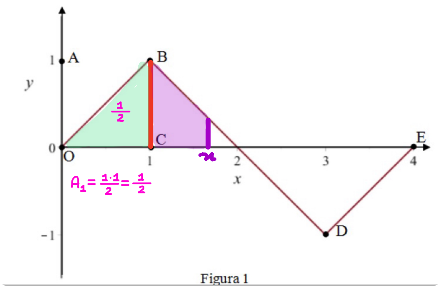


Figura 1

MATURITÀ SCIENTIFICA A COLORI PER TUTTI

3° CASO: $3 < x \leq 4$ $\quad f(x) = x - 4$

$$h(x) = \frac{1}{2} + \int_3^x f(t)\,dt = \frac{1}{2} + \int_3^x t - 4\,dt =$$

A_1

$$= \frac{1}{2} + \left[\frac{t^2}{2} - 4t\right]_3^x =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} - 4x - \left(\frac{3^2}{2} - 12\right) =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + 8$$

$$\frac{1}{2} - \frac{9}{2} + 12 = 8$$

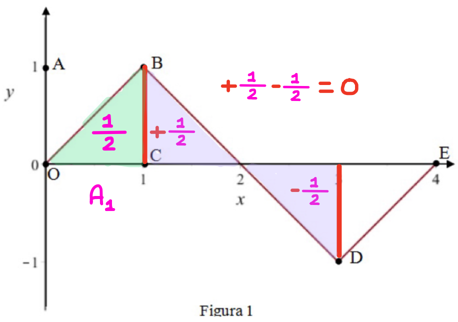


Figura 1

MATURITÀ SCIENTIFICA A COLORI PER TUTTI

PERTANTO:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{SE: } 0 \leq x \leq 1 \\ -\dfrac{x^2}{2} + 2x - 1 & \text{SE: } 1 < x \leq 3 \\ \dfrac{x^2}{2} - 4x + 8 & \text{SE: } 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

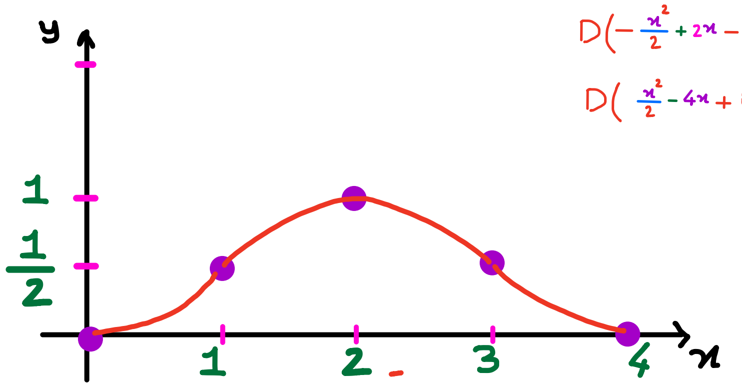
PARABOLA DI VERTICE $V(0;0)$ PASSANTE PER $(1;\frac{1}{2})$

PARABOLA DI VERTICE $V(2;1)$ PASSANTE PER $(1;\frac{1}{2})$ $(3;\frac{1}{2})$

PARABOLA DI VERTICE $V(4;0)$ PASSANTE PER $(3;\frac{1}{2})$

$D\left(-\frac{x^2}{2} + 2x - 1\right) = -x + 2 = 0 \qquad x = 2$

$D\left(\frac{x^2}{2} - 4x + 8\right) = x - 4 = 0 \qquad x = 4$



MATURITÀ SCIENTIFICA A COLORI PER TUTTI

WWW.CLAUDIODESIDERIO.WORDPRESS.COM