PROBLEMA 2

Nella figura 1 è rappresentato il grafico Γ della funzione continua $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, derivabile in $]0, +\infty)$, e sono indicate le coordinate di alcuni suoi punti.

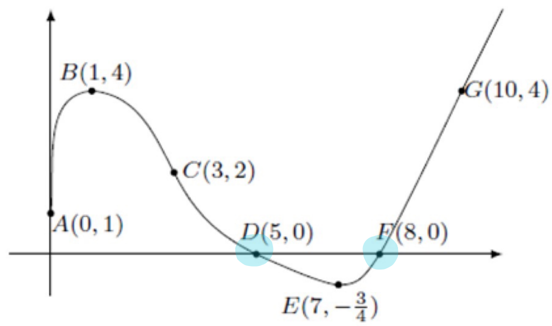


Figura 1

È noto che Γ è tangente all'asse y in A, che B ed E sono un punto di massimo e uno di minimo, che C è un punto di flesso con tangente di equazione $2x + y - 8 = 0$.

Nel punto D la retta tangente ha equazione $x + 2y - 5 = 0$ e per $x \geq 8$ il grafico consiste in una semiretta passante per il punto G. Si sa inoltre che l'area della regione delimitata dall'arco $ABCD$, dall'asse x e dall'asse y vale 11, mentre l'area della regione delimitata dall'arco DEF e dall'asse x vale 1.

1. In base alle informazioni disponibili, rappresenta indicativamente i grafici delle funzioni
$$y = f'(x)$$
$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$
Quali sono i valori di $f'(3)$ e $f'(5)$? Motiva la tua risposta.
2. Rappresenta, indicativamente, i grafici delle seguenti funzioni:
$$y = |f'(x)|$$
$$y = |f(x)|'$$
$$y = \frac{1}{f(x)}$$
specificando l'insieme di definizione di ciascuna di esse.
3. Determina i valori medi di $y = f(x)$ e di $y = |f(x)|$ nell'intervallo [0,8], il valore medio di $y = f'(x)$ nell'intervallo [1,7] e il valore medio di $y = F(x)$ nell'intervallo [9,10].

PROBLEMA 2

Nella figura 1 è rappresentato il grafico Γ della funzione continua $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, derivabile in $]0, +\infty)$, e sono indicate le coordinate di alcuni suoi punti.

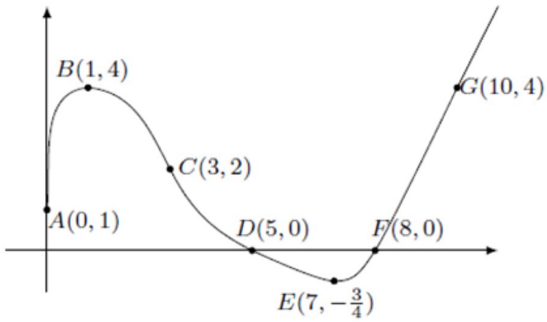


Figura 1

È noto che Γ è tangente all'asse y in A, che B ed E sono un punto di massimo e uno di minimo, che C è un punto di flesso con tangente di equazione $2x + y - 8 = 0$.

ANALIZZIAMO SUBITO IL GRAFICO:

DOMINIO :

INTERSEZIONE ASSI :

$x = 0 \Rightarrow$

$y = 0 \Rightarrow$

SEGNO : $f(x) > 0$ IN

$f(x) < 0$ IN

LIMITI AGLI ESTREMI DEL C.E. ED EVENTUALI ASINTOTI

PROBLEMA 2

Nella figura 1 è rappresentato il grafico Γ della funzione continua $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, derivabile in $]0,+\infty)$, e sono indicate le coordinate di alcuni suoi punti.

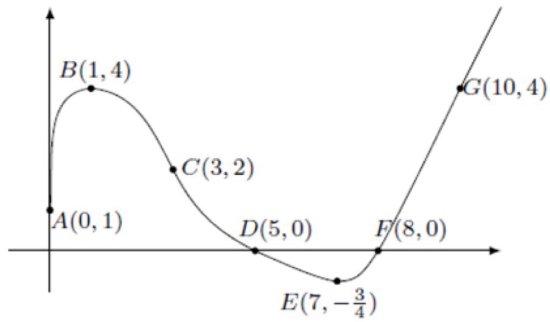


Figura 1

È noto che Γ è tangente all'asse y in A, che B ed E sono un punto di massimo e uno di minimo, che C è un punto di flesso con tangente di equazione $2x + y - 8 = 0$.

MONOTONIA E SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA

$f' > 0$ IN CRESCENTE

$f' < 0$ IN DECRESCENTE

$f' = 0$ IN

$f'(3) =$

$f'(5) =$

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) =$

tangente in C: $2x+y-8=0$

tangente in D: $x+2y-5=0$

CONCAVITÀ E SEGNO DELLA DERIVATA SECONDA

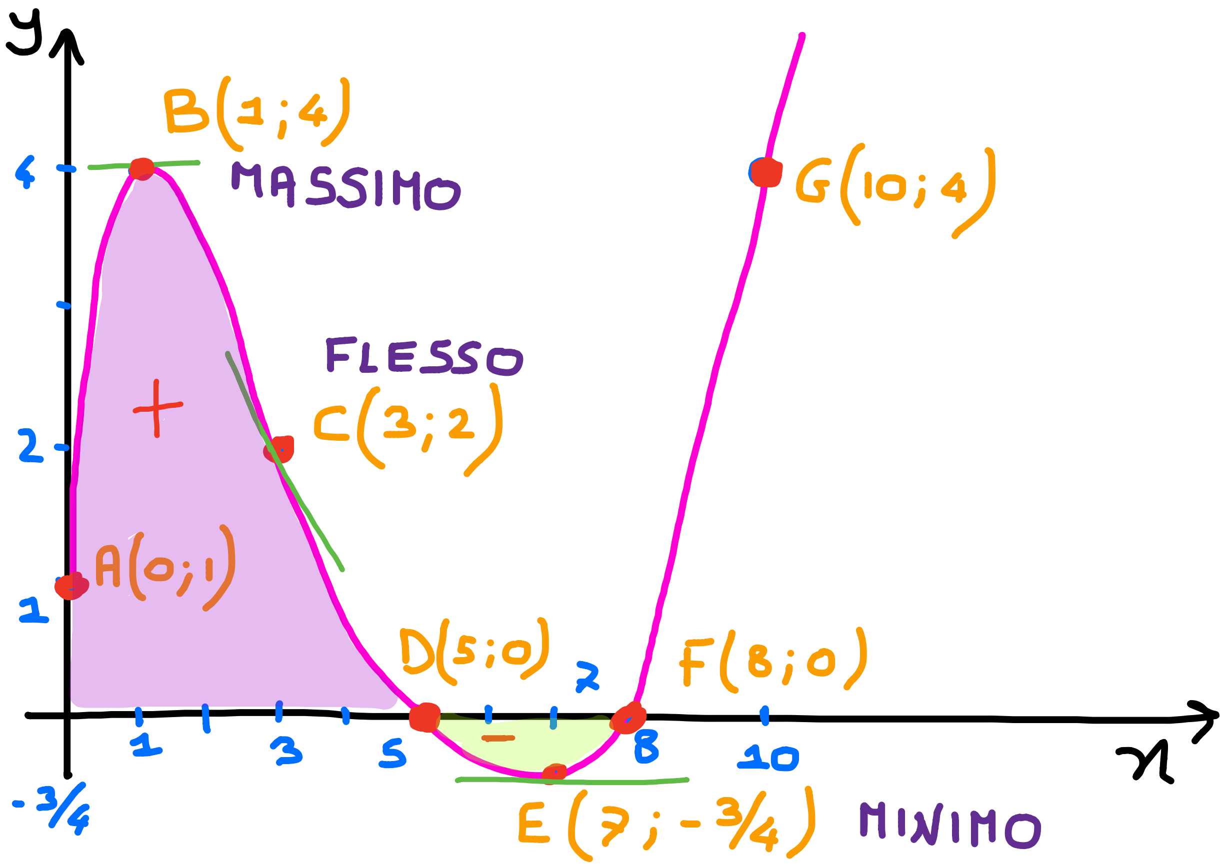
$f'' > 0$ IN

$f'' < 0$ IN

$f'' = 0$ IN

$f : [0;+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA

DERIVABILE IN $]\cancel{0};+\infty)$



TANGENTE ALL'ASSE y IN A

IMPLICA CHE: $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$ $\quad \nexists f'(0)$

TANGENTE VERTICALE

$B(1;4)$ ED $E(7;-\frac{3}{4})$ SONO PUNTI DI MASSIMO E MINIMO

IMPLICA CHE (FERMAT) $f'(1)=0$ $\quad f'(7)=0$

$C(3;2)$ È UN PUNTO DI FLESSO (IMPLICA $f''(3)=0$)

CON TANGENTE DI EQUAZIONE $2x+y-8=0$

DA CUI: $y=-2x+8$

CHE IMPLICA: $f'(3)=-2$

NEL PUNTO $D(5;0)$ LA RETTA TANGENTE HA EQUAZIONE

$x+2y-5=0$ DA CUI $m=-\frac{a}{b}=-\frac{1}{2}$

CHE IMPLICA: $f'(5)=-\frac{1}{2}$

PER $x \geq 8$ IL GRAFICO CONSISTE IN UNA SEMIRETTA PASSANTE PER IL PUNTO $G(10;4)$ DI ORIGINE $F(8;0)$

FACILMENTE TROVIAMO L'EQUAZIONE DELLA RETTA PER 2 PUNTI, AD ES. USANDO LA FORMULA: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

$FG: \ y=2x-16 \Rightarrow m=2 \Rightarrow f'(x)=2 \ \forall x \geq 8$

$\nexists f'(8)$

SI SA INOLTRE CHE L'AREA DELLA REGIONE DELIMITATA DALL'ARCO $ABCD$, DALL'ASSE x E DALL'ASSE y VALE 11

CIÒ IMPLICA CHE:

$$\int_0^5 f(x)\,dx = 11$$

E QUINDI ANCHE CHE: $F(5)=\int_0^5 f(t)\,dt = 11$

INFINE: L' AREA DELIMITATA DALL'ARCO DEF E DALL' ASSE x VALE 1

QUESTA VOLTA OCCORRE FARE PIÙ ATTENZIONE PERCHÉ LA FUNZIONE IN QUESTO INTERVALLO È NEGATIVA, QUINDI:

$$\int_5^8 f(x)\,dx = -1$$

E SE CONSIDERIAMO LA FUNZIONE INTEGRALE:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

DEDUCIAMO:

$$F(8) = \int_0^8 f(t)dt = \int_0^5 f(t)dt + \int_5^8 f(t)dt = 11 - 1 = 10$$

A QUESTO PUNTO, POSSIAMO RISPONDERE ALLA PRIMA DOMANDA

1

IN BASE ALLE INFORMAZIONI DISPONIBILI, RAPPRESENTA INDICATIVAMENTE I GRAFICI DELLE FUNZIONI

$$y = f'(x) \qquad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

QUALI SONO I VALORI DI $f'(3)$ E $f'(5)$?
MOTIVA LA TUA RISPOSTA.

NELL'ESPOSIZIONE DEL TESTO, ABBIAMO GIÀ DETTO E MOTIVATO CHE:

$$f'(3)=-2 \qquad f'(5)=-\frac{1}{2}$$

(RICORDANDO IL SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLA DERIVATA DI $f(x)$ IN x_0: RAPPRESENTA IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI $f(x)$ IN x_0).

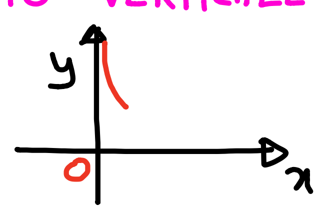
INIZIAMO A STUDIARE IL GRAFICO DI $y=f'(x)$

SAPPIAMO CHE IL SUO INSIEME DI DEFINIZIONE È:

$$]0;+\infty)$$

PERCHÈ $f(x)$ È IVI DERIVABILE; E INOLTRE:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=+\infty \Rightarrow \text{ASINTOTO VERTICALE } x=0$$



STUDIO DEL SEGNO DI $y = f'(x)$

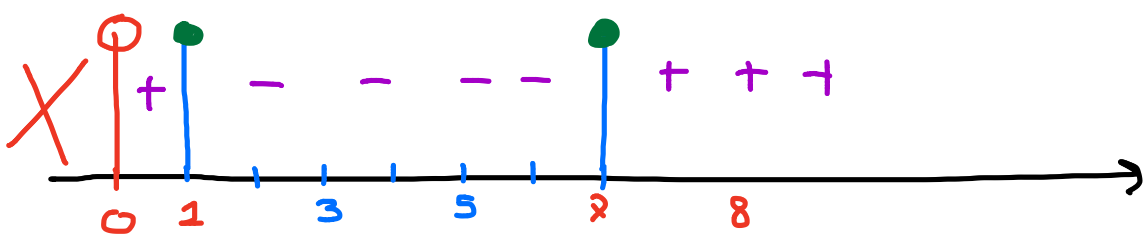
LO DEDUCIAMO DALLA MONOTONIA DI $f(x)$,
E PRECISAMENTE:

DOVE $f(x)$ È CRESCENTE $\Longrightarrow$ $f'(x) > 0$

DOVE $f(x)$ È DECRESCENTE $\Longrightarrow$ $f'(x) < 0$

NEI PUNTI DI MASSIMO E MINIMO: $f'(x) = 0$

IN SINTESI POSSIAMO RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE IL SEGNO DI $y = f'(x)$:



$f'(x) > 0$ in $]0; 1[\cup]7; +\infty)$

$f'(x) < 0$ in $]1; 7[$

$f'(x) = 0$ IN $x = 1 \vee x = 7$

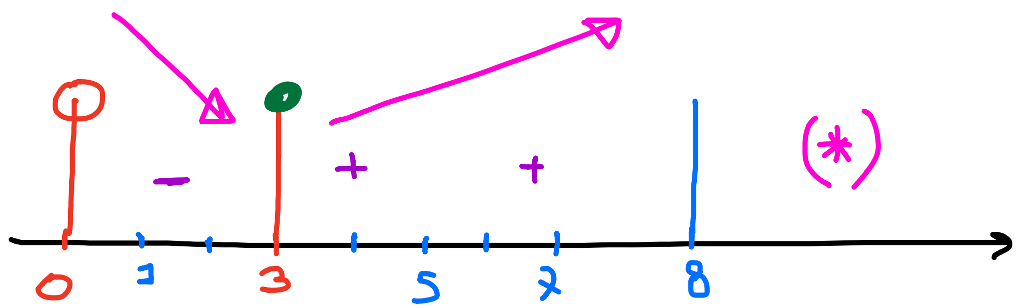
DA CUI DEDUCIAMO LE INTERSEZIONI CON GLI ASSI: $(1; 0)$ $(7; 0)$

DA $f'(3) = -2$ E $f'(5) = -\frac{1}{2}$ DEDUCIAMO I PUNTI: $(3; -2)$ $\left(5; -\frac{1}{2}\right)$

INFINE DALLA CONCAVITÀ DI $f(x)$ POSSIAMO DEDURRE LA MONOTONIA DI $f'(x)$

$f(x)$ CONVESSA $(f''>0) \Rightarrow f'(x)$ CRESCENTE
$f(x)$ CONCAVA $(f''<0) \Rightarrow f'(x)$ DECRESCENTE

RAPPRESENTANDO GRAFICAMENTE:



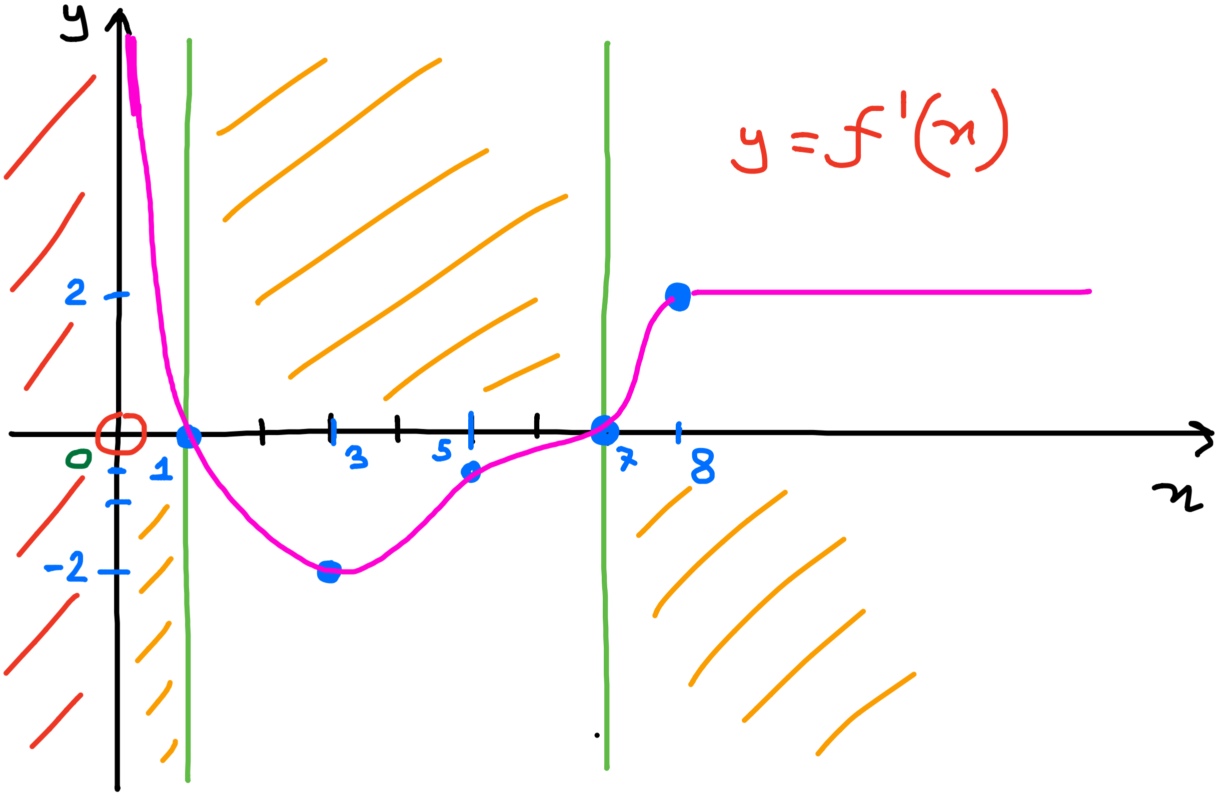
$y=f'(x)$ DECRESCENTE IN $]0;3[$
CRESCENTE IN $]3;8[$

IN $x=3$ MINIMO ASSOLUTO $m(3;-2)$

(*) PER $x \geq 8$ $f(x)=2x-16 \Rightarrow y=f'(x)=2$

$y=2$
RETTA ORIZZ.

CON QUESTE INFORMAZIONI POSSIAMO RAPPRESENTARE IL GRAFICO DI $y=f'(x)$



y
$y = f'(x)$
2
-2
0
1
3
5
7
8
x

STUDIAMO ADESSO IL GRAFICO DELLA FUNZIONE INTEGRALE

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

OSSERVIAMO SUBITO CHE: $F(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$

$\Rightarrow$ IL GRAFICO DI $F(x)$ PASSA PER $O(0;0)$

INSIEME DI DEFINIZIONE: $[0;+\infty)$

ALTRI VALORI NOTI:

$F(5) = 11 \Rightarrow (5;11)$

$F(8) = 10 \Rightarrow (8;10)$

INOLTRE, ESSENDO PER $x \geq 8$ $f(x) = 2x - 16$

RISOLVENDO L'INTEGRALE INDEFINITO:

$$\int 2x - 16\,dx = x^2 - 16x + c$$

IMPONENDO $F(8) = 10 \Rightarrow (8)^2 - 16(8) + c = 10$

$64 - 128 + c = 10$

$\Rightarrow c = 74$

QUINDI: PER $x \geq 8$ $F(x) = x^2 - 16x + 74$

CHE RAPPRESENTA L'EQUAZIONE DI UNA PARABOLA DI VERTICE $(8;10)$

INFATTI: $F'(x) = 2x - 16 = 0 \Rightarrow x = 8$

POSSIAMO STUDIARE LA MONOTONIA DELLA FUNZIONE $F(x)$ SAPENDO CHE:

$$F'(x)=f(x)$$

(PER IL TEOREMA DI TORRICELLI-BARROW)

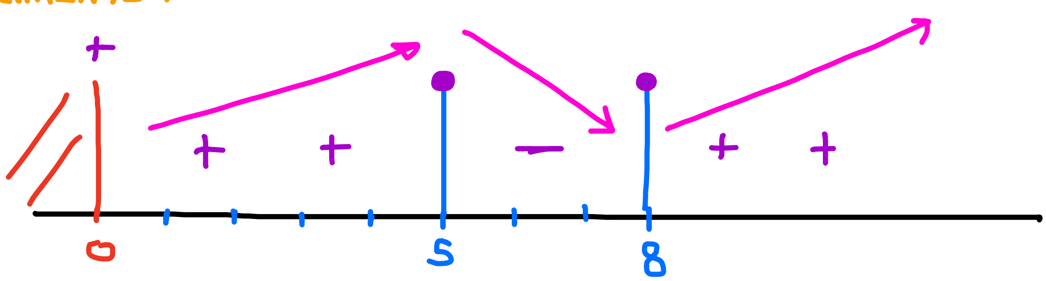
PERTANTO:

$F'(x)>0$ (CRESCENTE) $\iff f(x)>0$: IN $[0;5[$ E IN $]8;+\infty)$

$F'(x)<0$ (DECRESCENTE) $\iff f(x)<0$: IN $]5;8[$

$F'(x)=0$ (ESTREMO RELATIVO) $\iff f(x)=0$: $x=5 \vee x=8$

GRAFICAMENTE:



$x=5$ MASSIMO RELATIVO: $M(5;11)$

$x=8$ MINIMO RELATIVO: $m(8;10)$

E POSSIAMO STUDIARE LA CONCAVITÀ E I FLESSI

INFATTI:

$$F''(x)=f'(x)$$

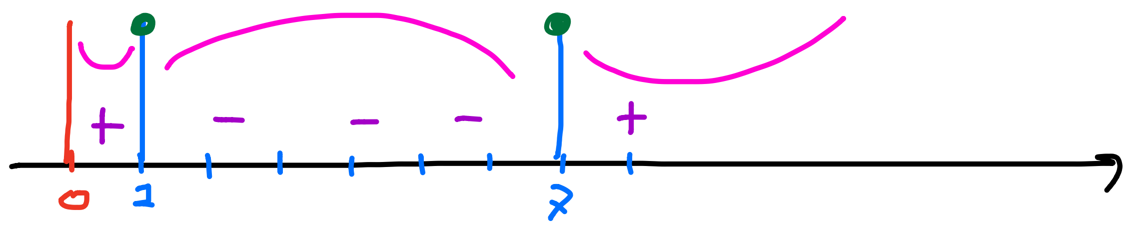
QUINDI:

$F''(x)>0$ (CONVESSA) $\Leftrightarrow f'(x)>0$: IN $]0;1[$ E IN $]7;+\infty)$

$F''(x)<0$ (CONCAVA) $\Leftrightarrow f'(x)<0$: IN $]1;7[$

$F''(x)=0$ (FLESSI) $\Leftrightarrow f'(x)=0$: PER $x=1 \vee x=7$

GRAFICAMENTE:



FLESSI IN $x=1 \vee x=7$

SAPPIAMO INOLTRE CHE:

$F'(0)=f(0)=1 \Rightarrow m_t=1$ TANGENTE IN O: $y=x$

$F'(1)=f(1)=4 \Rightarrow m_t=4$ TANGENTE NEL PUNTO DI FLESSO

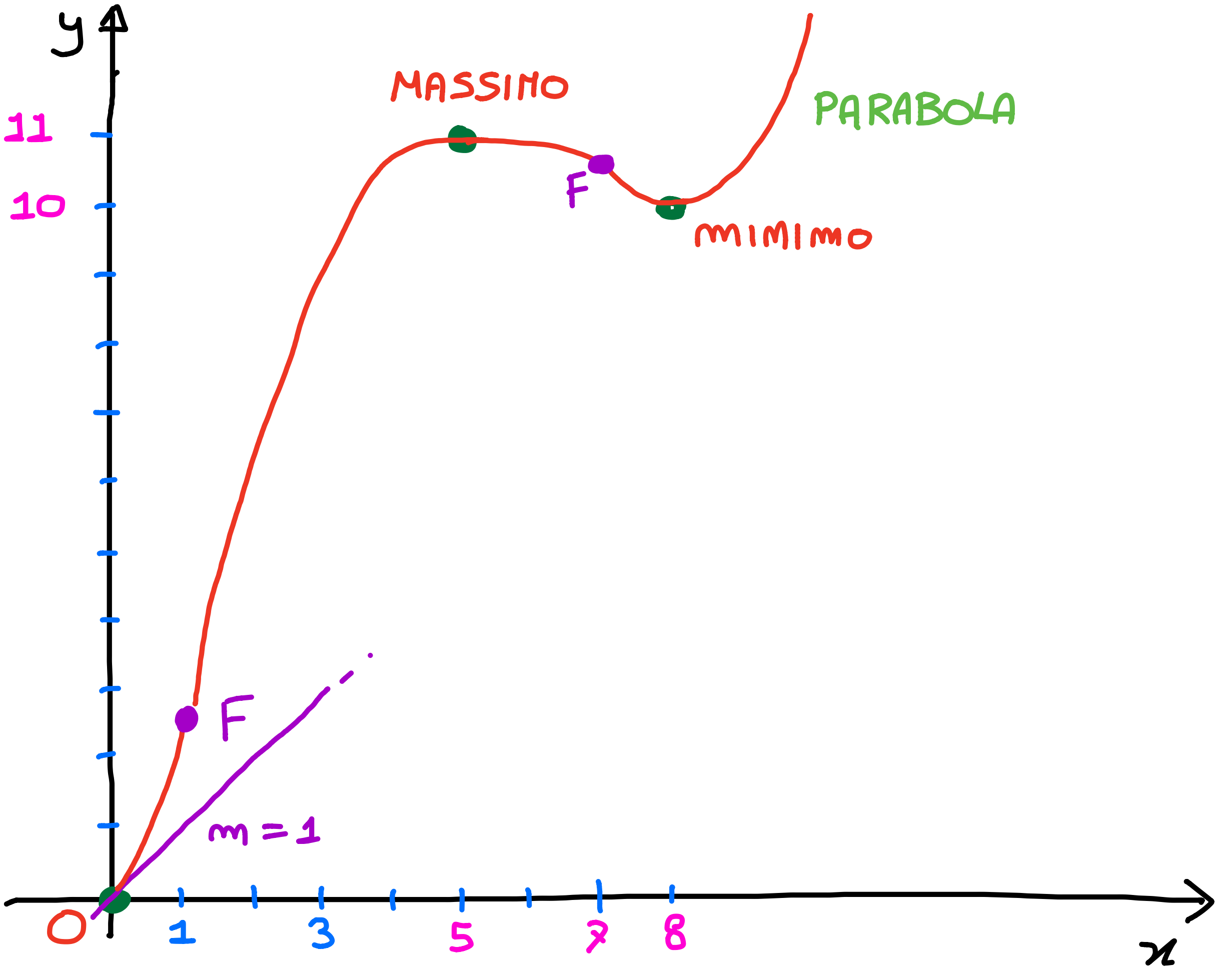
$F'(3)=f(3)=2$

$F'(5)=f(5)=0$

$F'(7)=f(7)=-3/4 \Rightarrow m_t=-3/4$ TANGENTE NEL PUNTO DI FLESSO

$F'(8)=f(8)=0$

ABBIAMO TUTTI GLI ELEMENTI PER RAPPRESENTARE IL GRAFICO DI $F(x)$:



y
x
MASSIMO
PARABOLA
MIMIMO
F
F
m = 1
11
10
O
1
3
5
7
8

2\. RAPPRESENTA, INDICATIVAMENTE, I GRAFICI DELLE SEGUENTI FUNZIONI :

$$y = |f'(x)|$$

$$y = |f(x)|'$$

$$y = \frac{1}{f(x)}$$

INIZIAMO CON LA FUNZIONE $y = |f'(x)|$

UTILIZZANDO LA DEFINIZIONE DI VALORE ASSOLUTO, POSSIAMO PARTIRE DAL GRAFICO DELLA FUNZIONE $y = f'(x)$ E RENDERE POSITIVO CIÒ CHE È NEGATIVO, ATTRAVERSO UNA SIMMETRIA RISPETTO ALL' ASSE $\vec{x}$

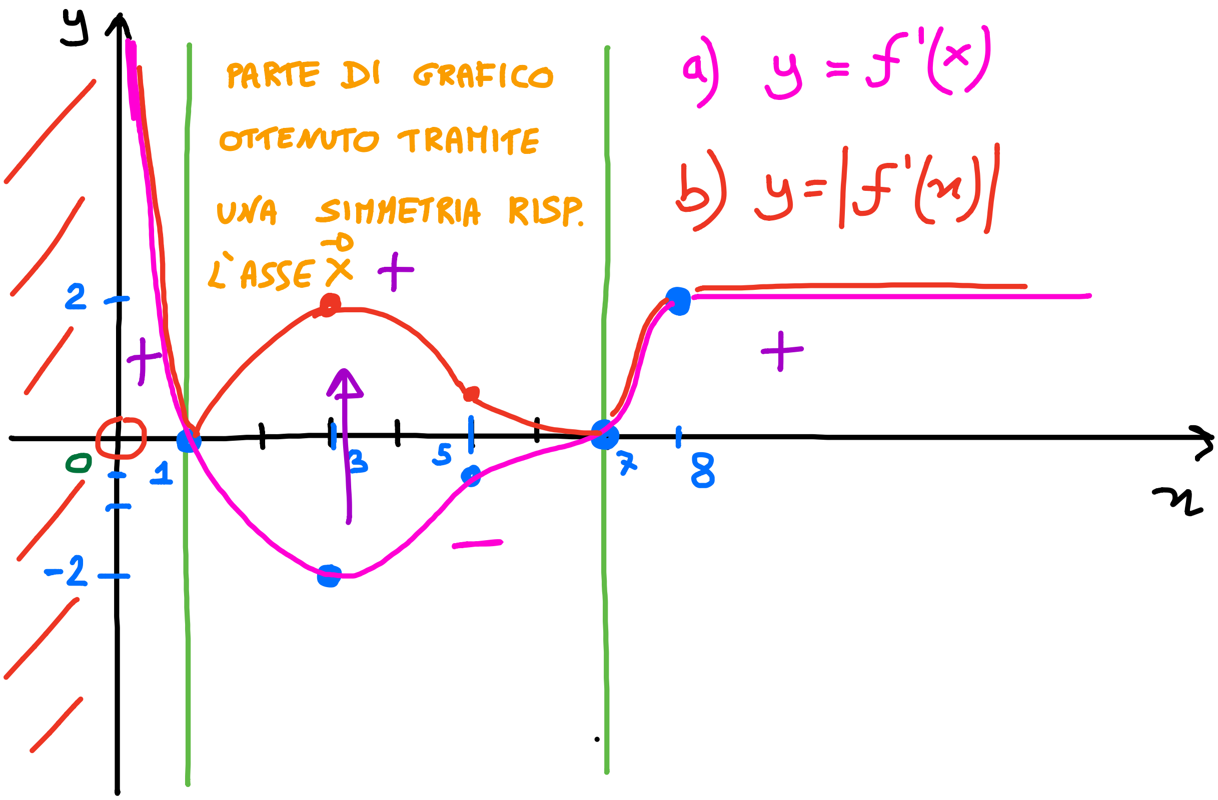
INFATTI :

$$y = |f'(x)| = \begin{cases} +f'(x) & \text{SE } f'(x) \geq 0 \\ -f'(x) & \text{SE } f'(x) \leq 0 \end{cases}$$

L'INSIEME DI DEFINIZIONE DI QUESTA FUNZIONE COINCIDE CON QUELLO DI $y = f'(x)$

$$I.E. =]0; +\infty)$$

SI AVRÀ PERTANTO :

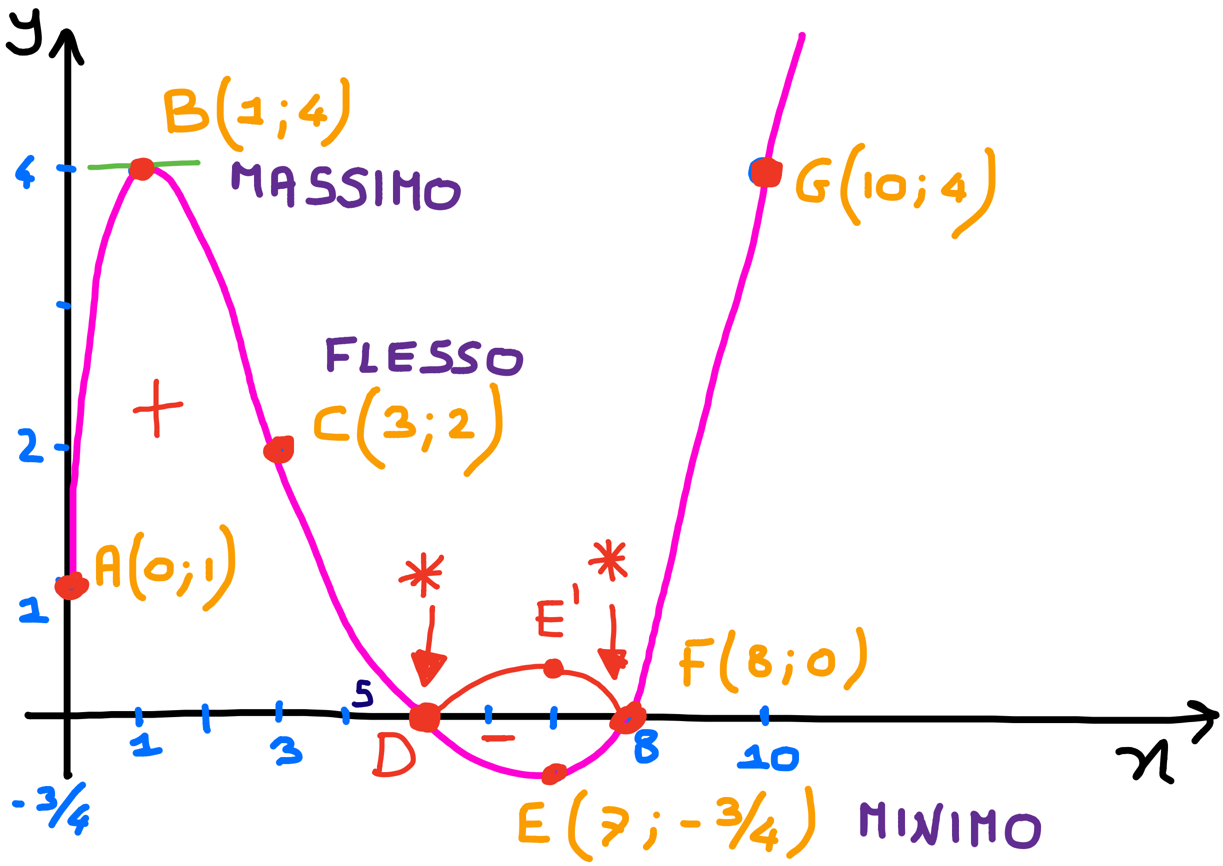


PASSIAMO ORA ALLA FUNZIONE $y = |f(x)|'$;
OCCORRE PRIMA RAPPRESENTARE IL GRAFICO DI

$$y = |f(x)|$$

OPERANDO CON UNA SIMMETRIA RISPETTO A $\vec{x}$, NEGLI INTERVALLI IN CUI $f(x) \leq 0$, QUINDI RAPPRESENTIAMO INDICATIVAMENTE IL GRAFICO DI $y = |f(x)|'$ CON UNA PROCEDURA UGUALE A QUELLA UTILIZZATA PER IL GRAFICO DI $f'(x)$.

RIPRENDIAMO IL GRAFICO DI $y=f(x)$ E APPLICHIAMO UNA SIMMETRIA RISPETTO ALL' ASSE $\overset{\circ}{x}$ NELL' INTERVALLO $[5;8]$ IN CUI $f(x)$ E' NON POSITIVO



RICORDANDO CHE: $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$ $\quad \nexists \, |f(0)|'$

INOLTRE, DAL GRAFICO SI EVINCE CHE NEI PUNTI DI ASCISSA $x=5$ E $x=8$ SI HANNO PUNTI ANGOLOSI ; PERTANTO $\nexists \, |f(5)|'$ $\quad \nexists \, |f(8)|'$ (*)

E PRECISAMENTE, ESSENDO:

$f'(5) = -\frac{1}{2}$ SI HA:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 5^-} |f(x)|' = -\frac{1}{2} \\ &\lim_{x \to 5^+} |f(x)|' = +\frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$ DISCONTINUITÀ DI 1^a SPECIE CON SALTO $S = \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right| = 1$

E ANALOGAMENTE, ESSENDO:

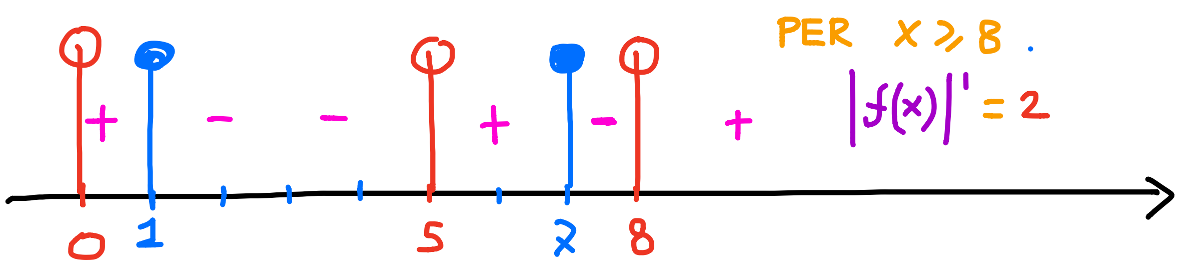
$f'(8) = 2$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 8^-} |f(x)|' = -2 \\ &\lim_{x \to 8^+} |f(x)|' = +2 \end{aligned}\right\}$$ PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI PRIMA SPECIE CON SALTO $S = 4$

L'INSIEME DI DEFINIZIONE È: $]0; +\infty) - \{5; 8\}$

POSSIAMO DEDURRE SEGNO E INTERSEZIONE CON L'ASSE $\vec{x}$ DALLA MONOTONIA DI $|f(x)|$; INFATTI:

$|f(x)|' > 0 \iff$ IL GRAFICO DI $y = |f(x)|$ È CRESCENTE



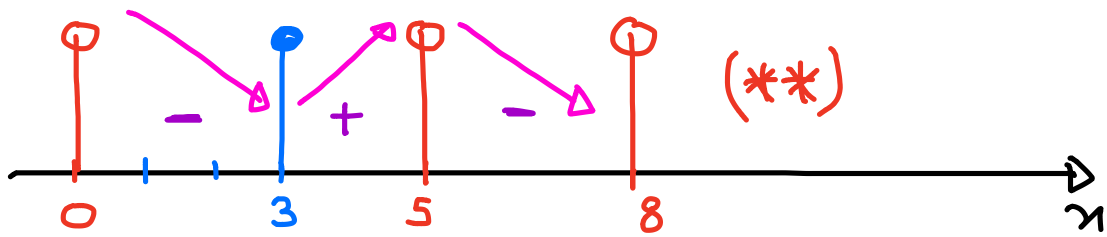
PER $x \geq 8$.

$|f(x)|' = 2$

ANALOGAMENTE, DALLA CONCAVITÀ DI $|f(x)|$ DEDUCIAMO LA MONOTONIA DI $|f(x)|'$; E PRECISAMENTE:

$|f(x)|'$ È CRESCENTE $\Longleftrightarrow$ $|f(x)|$ È CONVESSA $\cup$

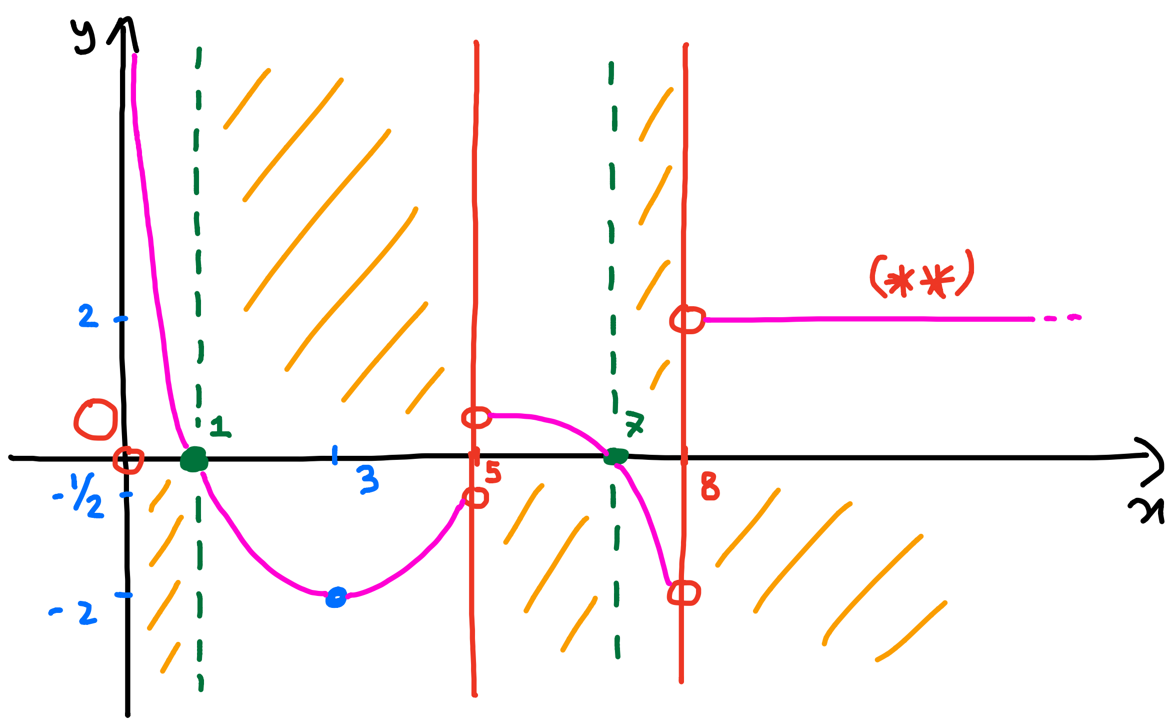
GRAFICAMENTE:



MINIMO IN $x = 3$

ED ESSENDO: $f'(3) = -2$ $\Rightarrow$ $m(3; -2)$

POSSIAMO RAPPRESENTARE, INDICATIVAMENTE, IL GRAFICO DI $y = |f(x)|'$



INFINE STUDIAMO INDICATIVAMENTE IL GRAFICO DI

$$y = \frac{1}{f(x)}$$

INSIEME DI DEFINIZIONE: $f(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 5 \wedge x \neq 8$

RICORDANDO CHE $\exists f(0) = 1 \Rightarrow (0; 1)$

SI HA:

$$I.D. = [0; +\infty) - \{5; 8\}$$

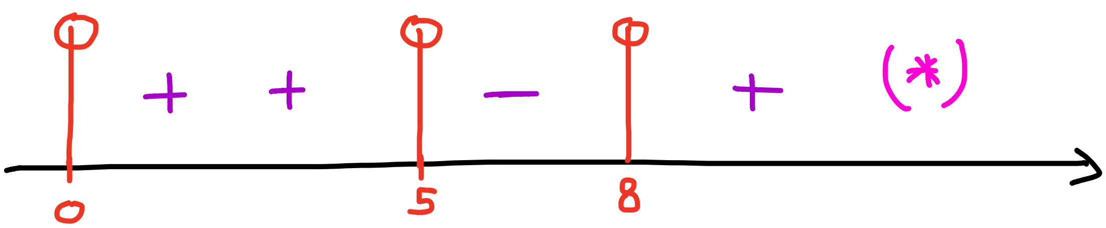
LIMITI E ASINTOTI

$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{f(x)} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty$$ $x = 5$ ASINTOTO VERTICALE

$$\lim_{x \to 8} \frac{1}{f(x)} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty$$ $x = 8$ ASINTOTO VERTICALE

STUDIO DEL SEGNO:

$\frac{1}{f(x)} > 0 \iff f(x) > 0$ (NELL' INSIEME DI DEFINIZ.)



$\frac{1}{f(x)} = 0 \Rightarrow$ MAI $\nexists x \in I.D.$

(*) PER $x > 8$ $f(x) = 2x - 16 \Rightarrow y = \frac{1}{2x-16}$

⇒ FUNZIONE OMOGRAFICA ⇒ IPERBOLE EQUILATERA CON ASINTOTI PARALLELI AGLI ASSI, E PRECISAMENTE

$x = 8$ ASINTOTO VERTICALE

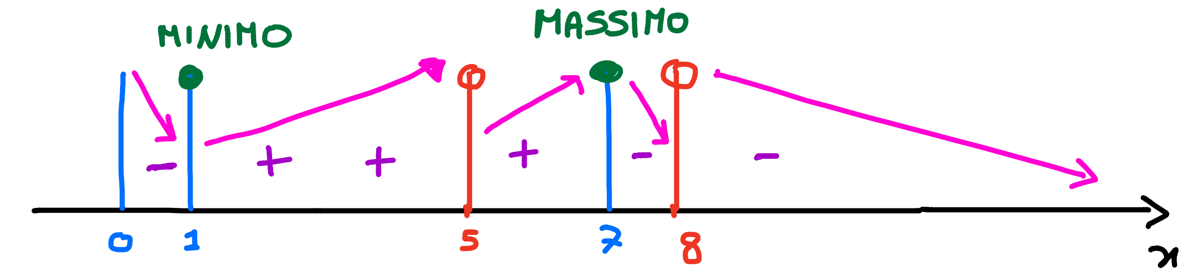
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x-16} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0^+$$ $y=0$ ASINTOTO ORIZZONTALE

STUDIO DELLA MONOTONIA

$$y = \frac{1}{f(x)} \qquad y' = \frac{-1 \cdot f'(x)}{\underbrace{f(x)^2}_{+}} > 0 \iff f'(x) < 0$$

⇒ COMPORTAMENTO OPPOSTO A QUELLO DI $f'(x)$

QUINDI:



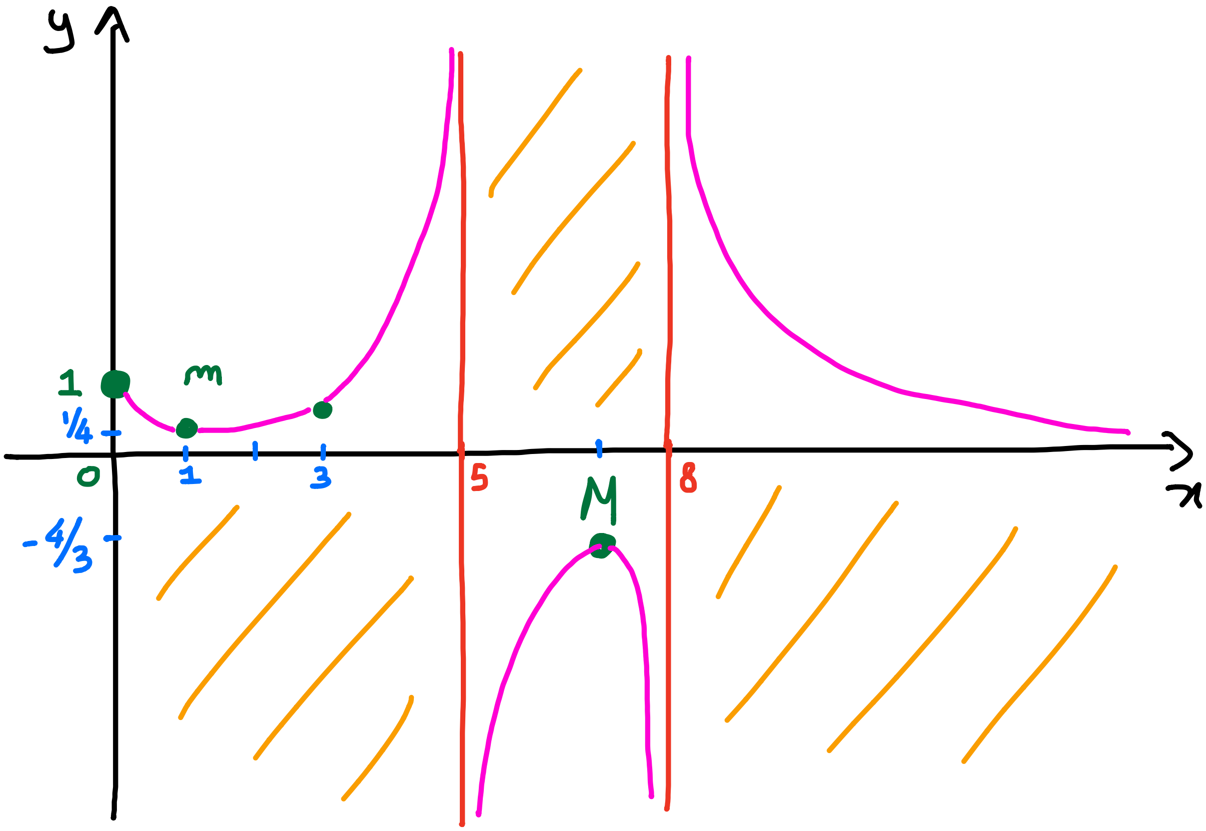
MINIMO RELATIVO IN $x=1$ ESSENDO $f(1)=4 \Rightarrow m\left(1; \frac{1}{4}\right)$

MASSIMO RELATIVO IN $x=7$ ESSENDO $f(7)=-3/4 \Rightarrow M\left(7; -\frac{4}{3}\right)$

PER COMPLETEZZA POSSIAMO AGGIUNGERE UN ULTERIORE PUNTO:

ESSENDO $f(3)=2 \Rightarrow \left(3; \frac{1}{2}\right)$

GRAFICO INDICATIVO DI $y = \frac{1}{f(x)}$



3. DETERMINA I VALORI MEDI DI $y = f(x)$ E DI $y = |f(x)|$ NELL' INTERVALLO $[0;\ 8]$, IL VALORE MEDIO DI $y = f'(x)$ NELL' INTERVALLO $[1, 2]$ E IL VALORE MEDIO DI $y = F(x)$ NELL' INTERVALLO $[9, 10]$.

APPLICANDO IL TEOREMA DELLA MEDIA POSSIAMO DETERMINARE IL VALORE MEDIO DI UNA FUNZIONE $f(x)$ NELL' INTERVALLO $[a;b]$:

$$V_M = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

INIZIAMO CON LA FUNZIONE $y = f(x)$ IN $[0;\ 8]$

ABBIAMO GIÀ CALCOLATO :

$$\int_0^8 f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^5 f(x)\,dx}_{\text{AREA DELIMITATA DALL' ARCO ABCD}} + \underbrace{\int_5^8 f(x)\,dx}_{\text{DALL' ARCO DEF}} = 11 - 1 = 10$$

PERTANTO :

$$V_M = \frac{10}{8-0} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

ANALOGAMENTE SI PROCEDERÀ PER LA FUNZIONE $y = |f(x)|$ IN $[0;\ 8]$ TENENDO CONTO CHE LA FUNZIONE È POSITIVA IN $[5;\ 8]$

$$V_M = \frac{\int_0^8 |f(x)|}{8-0}\,dx = \frac{\int_0^5 |f(x)|\,dx + \int_5^8 |f(x)|\,dx}{8} =$$

$$= \frac{11 + 1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

DETERMINIAMO ADESSO IL VALORE MEDIO DELLA FUNZIONE $y=f'(x)$ NELL' INTERVALLO $[1;7]$

RICORDANDO CHE: $\int f'(x)\,dx = f(x)+c$

SI AVRÀ:

$$V_M = \frac{\int_1^7 f'(x)\,dx}{7-1} = \frac{\left[f(x)\right]_1^7}{6} = \frac{f(7)-f(1)}{6} =$$

$$= \frac{-\frac{3}{4} - 4}{6} = \frac{-\frac{19}{4}}{6} = -\frac{19}{24}$$

DETERMINIAMO, INFINE, IL VALORE MEDIO DI $F(x)$ NELL' INTERVALLO $[9;10]$.

BASTA RICORDARE CHE: $F(x)=x^2-16x+74$ PER $x \geq 8$

QUINDI:

$$V_M = \frac{\int_9^{10} F(x)\,dx}{10-9} = \int_9^{10} \left(x^2 - 16x + 74\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \overset{8}{\cancel{16}} \frac{x^2}{\cancel{2}} + 74x + c \right]_9^{10} =$$

$$= \frac{1000}{3} - 8 \cdot 100 + 74 \cdot 10 - \left(\frac{\overset{3}{\cancel{9}} \cdot 81}{\cancel{3}} - 8 \cdot 81 + 74 \cdot 9 \right) =$$

$$= \frac{1000}{3} \underbrace{- 800 + 740 - 243 + 648 - 666}_{} =$$

$$= \frac{1000}{3} - 321 = \frac{1000 - 963}{3} = \frac{37}{3}$$

4. SCRIVI LE EQUAZIONI DELLE RETTE TANGENTI AL GRAFICO DELLA FUNZIONE $F(x)$ NEI SUOI PUNTI DI ASCISSE 0 E 8, MOTIVANDO LE RISPOSTE.

OCCORRE APPLICARE LA FORMULA:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

LA FUNZIONE È $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

ABBIAMO GIÀ OSSERVATO CHE

$F(0) = 0$

$F'(x) = f(x) \Rightarrow F'(0) = f(0) = 1$

(INFATTI IL GRAFICO DI $f(x)$ PASSA PER $(0;1)$)

QUINDI: $y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x$

INVECE, NEL PUNTO DI ASCISSA 8 LA FUNZIONE INTEGRALE PRESENTA UN MINIMO RELATIVO ED È IVI DERIVABILE, PERTANTO PER IL TEOREMA DI FERMAT: $F'(8) = 0$ E SI HA UNA TANGENTE ORIZZONTALE.

AVEVAMO GIÀ OSSERVATO CHE $F(8) = 10$ QUINDI LA TANGENTE HA EQUAZIONE: $y = 10$