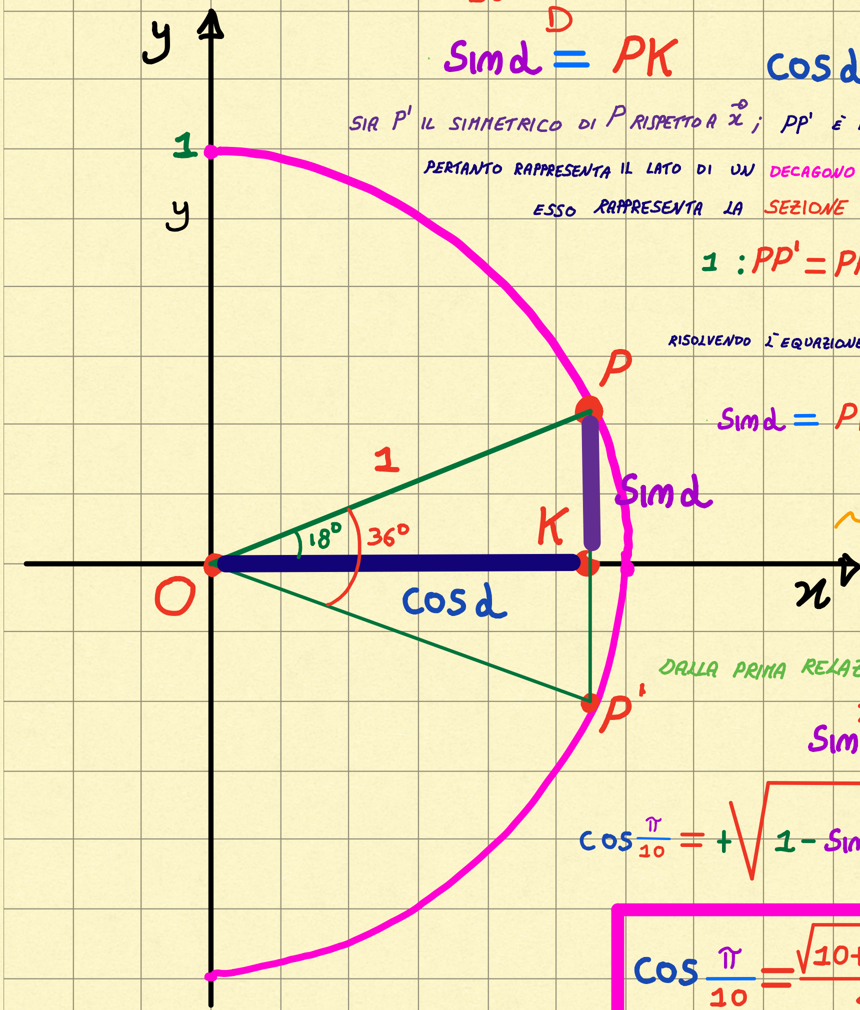
GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

SENO E COSENO DI $\frac{\pi}{10}$ 18°

CONSIDERIAMO L'ANGOLO DI $\frac{\pi}{10}$, ESSO INDIVIDUA UN PUNTO $P(x;y)$

$$\sin\alpha \overset{D}{=} PK \qquad \cos\alpha \overset{D}{=} OK$$



SIA P' IL SIMMETRICO DI P RISPETTO A $\hat{x}$; PP' È INDIVIDUATO DA UN ANGOLO DI 36° (360°:10), PERTANTO RAPPRESENTA IL LATO DI UN DECAGONO REGOLARE; SI PUÒ DIMOSTRARE CHE ESSO RAPPRESENTA LA SEZIONE AUREA DEL RAGGIO

$$1 : PP' = PP' : (1 - PP')$$

RISOLVENDO L'EQUAZIONE SI TROVA:

NUMERO AUREO

$$PP' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\sin\alpha = PK = \frac{PP'}{2} \quad \text{DA CUI ...}$$

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

DALLA PRIMA RELAZIONE FONDAMENTALE:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\frac{\pi}{10} = +\sqrt{1-\sin^2\alpha} \quad \text{SI DIMOSTRA ...}$$

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$$

DALLA SECONDA RELAZIONE FONDAMENTALE:

$$\tan\frac{\pi}{10} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

SI DIMOSTRA ...

DALLA TERZA RELAZIONE FONDAMENTALE:

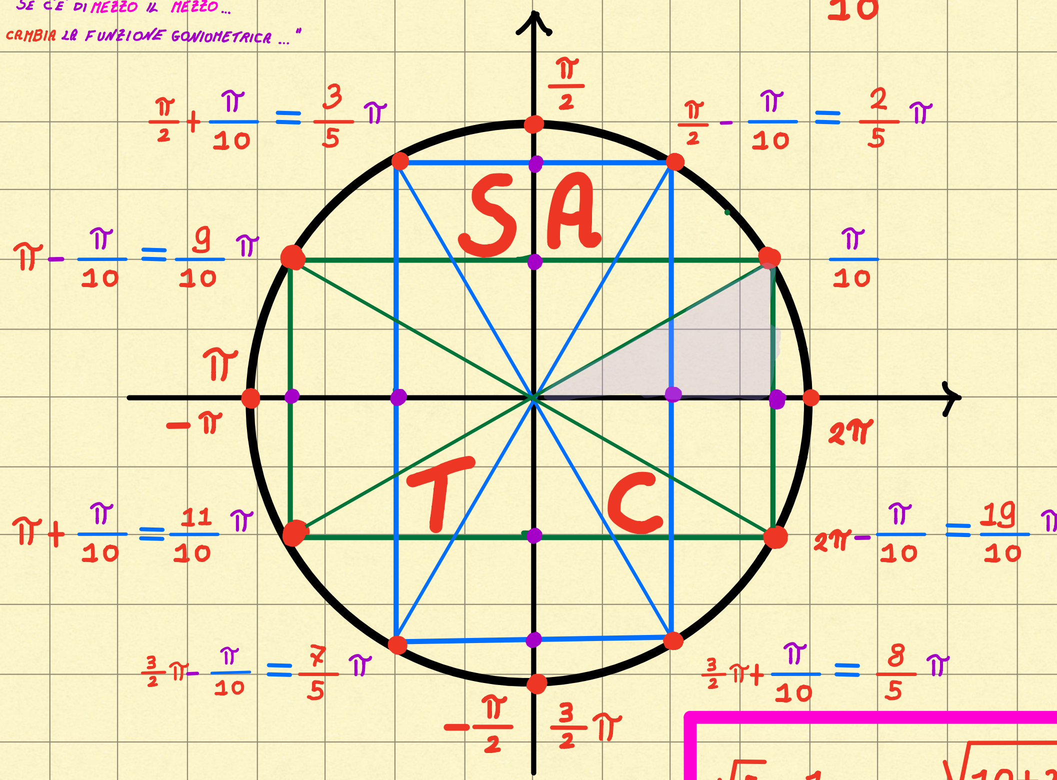
$$\cot\frac{\pi}{10} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\boxed{\tan\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5} \qquad \cot\frac{\pi}{10} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}}$$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

ARCHI ASSOCIATI A $\frac{\pi}{10}$

" SE C'È DI MEZZO IL MEZZO...
... CAMBIA LA FUNZIONE GONIOMETRICA ..."



QUATERNA AUREA

$$\boxed{\begin{array}{cc} \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} & \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \\[2ex] \dfrac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5} & \sqrt{5+2\sqrt{5}} \end{array}}$$

$$\tan\frac{11}{10}\pi = +\tan\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5} \qquad \sin\frac{2}{5}\pi = +\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\cot\frac{8}{5}\pi = -\tan\frac{\pi}{10} = -\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5} \qquad \cos\frac{3}{5}\pi = -\sin\frac{\pi}{10} = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

PROVACI TU...

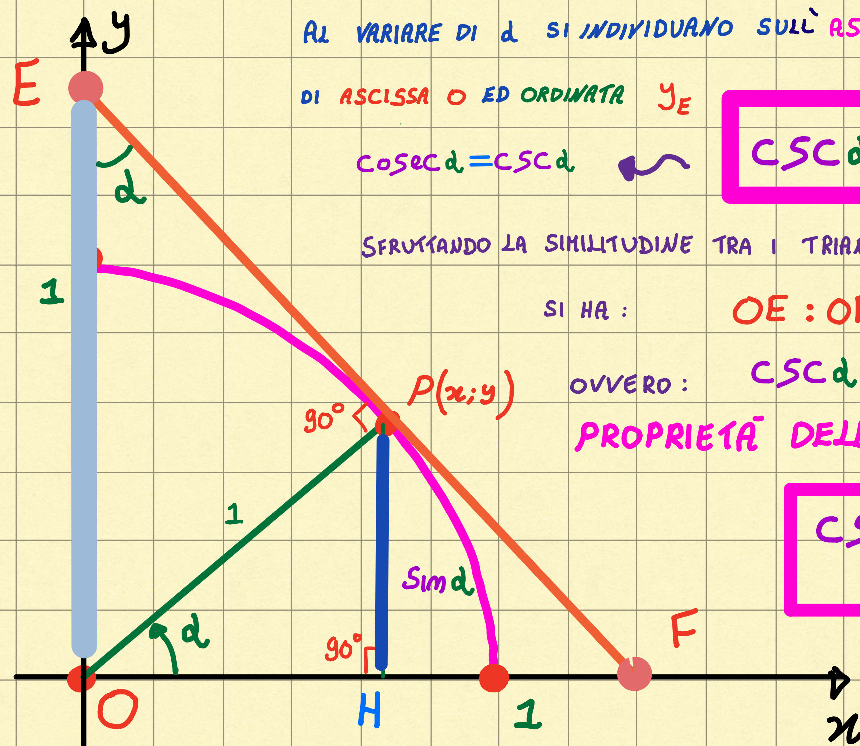
$\tan\frac{7}{5}\pi =$ $\qquad$ $\sin\frac{9}{10}\pi =$

$\cot\frac{19}{10}\pi =$ $\qquad$ $\cos\frac{11}{10}\pi =$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

DEFINIZIONE DI COSECANTE DI UN ANGOLO

CONSIDERIAMO UN ANGOLO α NEL PRIMO QUADRANTE, ESSO INDIVIDUA UN PUNTO $P(x;y)$, TRACCIAMO LA RETTA TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA IN $P(x;y)$ ESSA INCONTRA L'ASSE y IN $E(0;y_E)$



AL VARIARE DI α SI INDIVIDUANO SULL'ASSE y INFINITI PUNTI E DI ASCISSA 0 ED ORDINATA y_E

$\operatorname{cosec}\alpha = \csc\alpha$

$$\boxed{\csc\alpha = y_E}$$

SFRUTTANDO LA SIMILITUDINE TRA I TRIANGOLI OPE E OPH

SI HA: $OE : OP = OP : PH$

OVVERO: $\csc\alpha : 1 = 1 : \sin\alpha$

PROPRIETÀ DELLA COSECANTE

$$\boxed{\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}}$$

TUTTE LE RISPOSTE ALLE DOMANDE SU $\csc\alpha$ SI POSSONO SEMPRE TROVARE FACENDO RIFERIMENTO AL SUO SIGNIFICATO GEOMETRICO E ALLA SUA PROPRIETÀ

SEGNO: LO STESSO DI $\sin\alpha$

PERIODICITÀ $T = 2\pi$ $\quad \csc\alpha = \csc(\alpha + 2k\pi)$

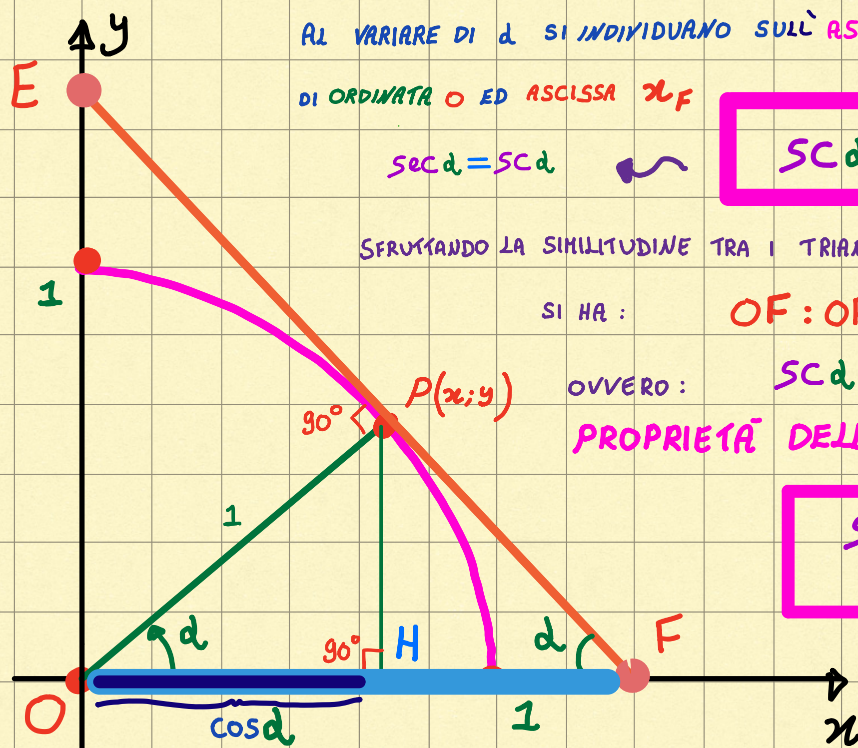
C.E. $x \neq \pi + 2k\pi$

CODOMINIO $\csc\alpha \leq -1 \;\vee\; \csc\alpha \geq 1$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

DEFINIZIONE DI SECANTE DI UN ANGOLO

CONSIDERIAMO UN ANGOLO α NEL PRIMO QUADRANTE, ESSO INDIVIDUA UN PUNTO $P(x;y)$, TRACCIAMO LA RETTA TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA IN $P(x;y)$ ESSA INCONTRA L'ASSE x IN $F(x_F;0)$



AL VARIARE DI α SI INDIVIDUANO SULL'ASSE x INFINITI PUNTI F DI ORDINATA 0 ED ASCISSA x_F

$\sec\alpha = sc\,\alpha$ $\boxed{sc\,\alpha = x_F}$

SFRUTTANDO LA SIMILITUDINE TRA I TRIANGOLI OPF E OPH

SI HA: $OF : OP = OP : OH$

OVVERO: $sc\,\alpha : 1 = 1 : \cos\alpha$

PROPRIETÀ DELLA SECANTE

$$\boxed{sc\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}}$$

TUTTE LE RISPOSTE ALLE DOMANDE SU $csc\,\alpha$ SI POSSONO SEMPRE TROVARE FACENDO RIFERIMENTO AL SUO SIGNIFICATO GEOMETRICO E ALLA SUA PROPRIETÀ

SEGNO: LO STESSO DI $\cos\alpha$

PERIODICITÀ $T = 2\pi$ $\quad sc\,\alpha = sc(\alpha + 2K\pi)$

C.E. $x \neq \frac{\pi}{2} + 2K\pi$

CODOMINIO $sc\,\alpha \leq -1 \vee sc\,\alpha \geq 1$

GRAFICI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE

rappresenta anche la misura dell'arco $\widehat{AB}$, mentre l'ordinata di B, ossia Y_B, rappresenta *sen x*.
Pertanto, per ottenere un punto C del grafico di $y = sen\,x$ è sufficiente considerare nel piano xoy il punto che ha la stessa ordinata Y_B di B e per ascissa la misura dell'arco $\widehat{AB}$ (**FIGURA 26**).

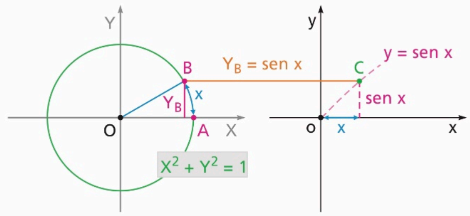


FIGURA 26

In **FIGURA 27** ci siamo limitati a tracciare il grafico di $y = sen\ x$ nell'intervallo $[0\,;\,2\pi]$. Ne comprenderai il motivo nel **PARAGRAFO 14**.

Immaginiamo ora di considerare, in successione, valori di x che crescono da 0 a 2π, cioè di far descrivere a B l'intera circonferenza goniometrica (in senso antiorario), ed esaminiamo che cosa accade in ciascun quadrante (**TABELLA 3** e **FIGURA 27**).

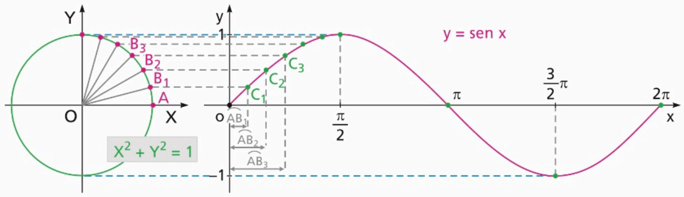


FIGURA 27

Se una funzione è crescente in un intervallo, il grafico della funzione è **ascendente** in quell'intervallo. Analogamente, se la funzione è decrescente il grafico è **discendente**.

TABELLA 3

	Nel piano XOY il punto B si muove sulla circonferenza goniometrica ...	$Y_B = sen\ x$	Nel piano xoy il punto C descrive una ...
1° quadrante $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$	dal punto $A(1\,;\,0)$ al punto $(0\,;\,1)$	**cresce** da $0 = sen\ 0$ a $1 = sen\ \frac{\pi}{2}$	**curva ascendente** dall'origine $(0\,;\,0)$ al punto $\left(\frac{\pi}{2}\,;\,1\right)$
2° quadrante $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$	dal punto $(0\,;\,1)$ al punto $(-1\,;\,0)$	**decresce** da $1 = sen\ \frac{\pi}{2}$ a $0 = sen\ \pi$	**curva discendente** dal punto $\left(\frac{\pi}{2}\,;\,1\right)$ al punto $(\pi\,;\,0)$
3° quadrante $\pi \le x \le \frac{3}{2}\pi$	dal punto $(-1\,;\,0)$ al punto $(0\,;\,-1)$	**decresce** da $0 = sen\ \pi$ a $-1 = sen\ \frac{3}{2}\pi$	**curva discendente** dal punto $(\pi\,;\,0)$ al punto $\left(\frac{3}{2}\pi\,;\,-1\right)$
4° quadrante $\frac{3}{2}\pi \le x \le 2\pi$	dal punto $(0\,;\,-1)$ al punto $A(1\,;\,0)$	**cresce** da $-1 = sen\ \frac{3}{2}\pi$ a $0 = sen\ 2\pi$	**curva ascendente** dal punto $\left(\frac{3}{2}\pi\,;\,-1\right)$ al punto $(2\pi\,;\,0)$

13. Grafico della funzione coseno

Per ottenere il grafico della funzione coseno, di equazione $y = \cos x$, nell'intervallo $[0\,;\,2\pi]$ possiamo procedere come abbiamo fatto per il grafico della funzione seno. Dobbiamo tenere però presente che il coseno di x è definito come l'ascissa del punto B della circonferenza goniometrica associato all'angolo di x radianti. Per ottenere un'efficace rappresentazione grafica, in **FIGURA 28** abbiamo quindi ruotato il piano XOY, in cui è rappresentata la circonferenza goniometrica, di 90° in senso antiorario (**TABELLA 4**).

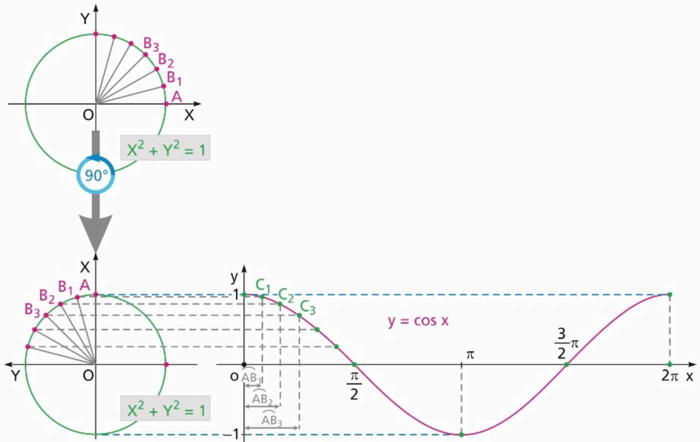


FIGURA 28

TABELLA 4

	Nel piano XOY il punto B si muove sulla circonferenza goniometrica ...	$X_B = \cos x$	Nel piano xoy il punto C descrive una ...
1° quadrante $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$	dal punto $A(1\,;\,0)$ al punto $(0\,;\,1)$	decresce da $1 = \cos 0$ a $0 = \cos \frac{\pi}{2}$	curva discendente dal punto $(0\,;\,1)$ al punto $\left(\frac{\pi}{2}\,;\,0\right)$
2° quadrante $\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$	dal punto $(0\,;\,1)$ al punto $(-1\,;\,0)$	decresce da $0 = \cos \frac{\pi}{2}$ a $-1 = \cos \pi$	curva discendente dal punto $\left(\frac{\pi}{2}\,;\,0\right)$ al punto $(\pi\,;\,-1)$
3° quadrante $\pi \le x \le \frac{3}{2}\pi$	dal punto $(-1\,;\,0)$ al punto $(0\,;\,-1)$	cresce da $-1 = \cos \pi$ a $0 = \cos \frac{3}{2}\pi$	curva ascendente dal punto $(\pi\,;\,-1)$ al punto $\left(\frac{3}{2}\pi\,;\,0\right)$
4° quadrante $\frac{3}{2}\pi \le x \le 2\pi$	dal punto $(0\,;\,-1)$ al punto $A(1\,;\,0)$	cresce da $0 = \cos \frac{3}{2}\pi$ a $1 = \cos 2\pi$	curva ascendente dal punto $\left(\frac{3}{2}\pi\,;\,0\right)$ al punto $(2\pi\,;\,1)$

3° e 4° quadrante: $\pi \le x < \frac{3}{2}\pi \vee \frac{3}{2}\pi < x \le 2\pi$

Il punto B si muove sulla circonferenza goniometrica assumendo posizioni diametralmente opposte a quelle che aveva occupato nel primo e nel secondo quadrante.

Pertanto il punto T assume le stesse posizioni che aveva occupato quando, essendo $0 \le x \le \pi$, il punto B si trovava nel primo e nel secondo quadrante; quindi il grafico di $y = \tan x$ nell'intervallo $[\pi\,;\,2\pi]$ presenta la stessa «forma» che ha nell'intervallo $[0\,;\,\pi]$.

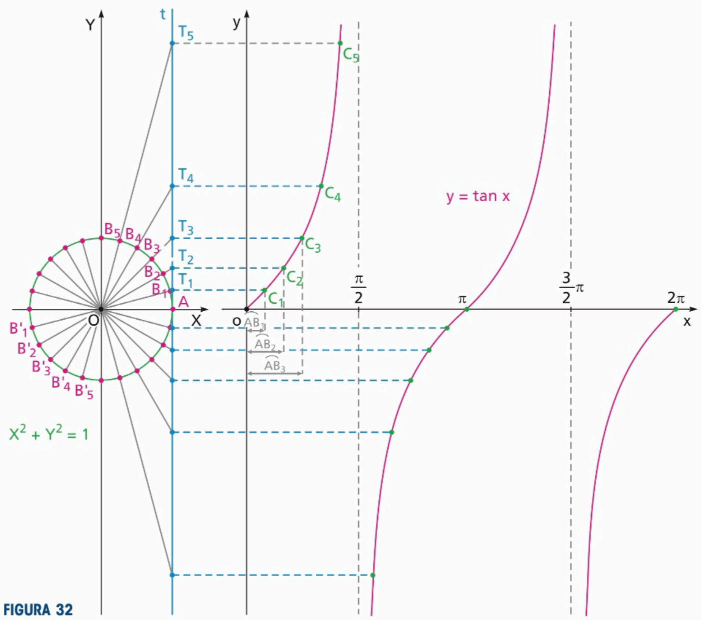


FIGURA 32

Osserviamo che il grafico di $y = \tan x$ non interseca le rette di equazioni $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3}{2}\pi$ ma, approssimandosi a esse, le ordinate dei suoi punti divengono maggiori in valore assoluto di qualsiasi numero reale prefissato. Si dice che tali rette sono **asintoti verticali** della curva.

Si dice inoltre che $\tan x$ tende all'infinito per x tendente a $\frac{\pi}{2}$ e per x tendente a $\frac{3}{2}\pi$, e si scrive:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$$

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}\pi} \tan x = \infty$$

Il concetto di limite e la relativa simbologia vengono qui introdotti in modo intuitivo. Imparerai la definizione precisa studiando l'analisi infinitesimale.

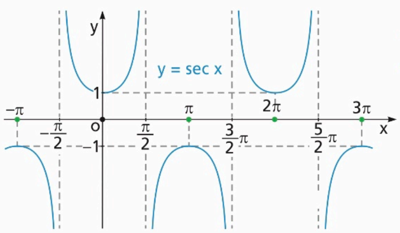
GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

GRAFICI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE

TABELLA 5

Funzione	Dominio	Codominio	Periodicità e simmetrie del grafico
Secante $y = sec\,x$	$cos\,x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$-1 \leq cos\,x \leq 1$ $\Downarrow$ $sec\,x \leq -1 \vee sec\,x \geq 1$	Come la funzione coseno, • ha periodo 2π; • è **pari**, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.
Cosecante $y = csc\,x$	$sen\,x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi$	$-1 \leq sen\,x \leq 1$ $\Downarrow$ $csc\,x \leq -1 \vee csc\,x \geq 1$	Come la funzione seno, • ha periodo 2π; • è **dispari**, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine.
Cotangente $y = cot\,x$	$tan\,x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi$	$tan\,x \in \mathbb{R} \Rightarrow cot\,x \in \mathbb{R}$ In particolare $cot\,x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	Come la funzione tangente, • ha periodo π; • è **dispari**, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine.

Tracciamo ora i grafici delle funzioni secante (**FIGURA 39**), cosecante (**FIGURA 40**) e cotangente (**FIGURA 41**).

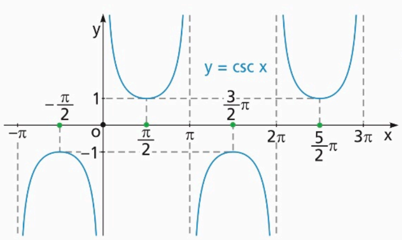


dominio $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

codominio $(-\infty\,;-1] \cup [1\,;+\infty)$

FIGURA 39

Tutte le rette di equazione $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ sono asintoti verticali: infatti, all'approssimarsi di x a tali valori, $cos\,x$ diventa sempre più prossimo a zero; dunque $sec\,x = \frac{1}{cos\,x}$ diviene, in valore assoluto, maggiore di qualsiasi numero reale prefissato.

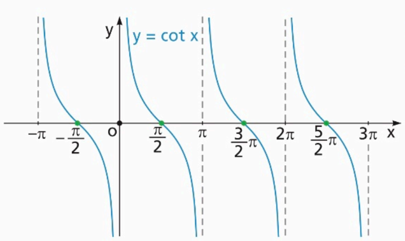


dominio $\mathbb{R} - \{k\pi\}$

codominio $(-\infty\,;-1] \cup [1\,;+\infty)$

FIGURA 40

Tutte le rette di equazione $x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ sono asintoti verticali del grafico della funzione cosecante.



dominio $\mathbb{R} - \{k\pi\}$

codominio $\mathbb{R}$

FIGURA 41

Tutte le rette di equazione $x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ sono asintoti verticali del grafico della funzione cotangente.

Funzioni inverse delle funzioni goniometriche

19. Arcoseno

Sappiamo che la funzione seno associa, a un qualsiasi numero reale x_0, uno e un solo valore y_0 (compreso tra -1 e 1) che rappresenta il seno dell'angolo orientato la cui misura in radianti è x_0.
Viceversa, dato un valore y_0, compreso tra -1 e 1, esistono infiniti valori di x associati a esso (**FIGURA 42**), cioè esistono infiniti valori x tali che $y_0 = sen\,x$: la funzione seno *non è iniettiva* e pertanto non è invertibile.
Se però consideriamo solo i valori di x tali che $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, cioè *restringiamo* il dominio della funzione seno all'intervallo chiuso $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, risulta che a un dato valore y_0, compreso tra -1 e 1, resta associato un solo valore x_0 tale che $y_0 = sen\,x_0$, e quindi la funzione $y = sen\,x$ può essere invertita.

Scegliamo *convenzionalmente* di restringere il dominio della funzione seno all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ perché simmetrico rispetto all'origine, come il grafico della funzione seno. Avremmo potuto scegliere un qualsiasi altro intervallo nel quale la funzione $y = sen\,x$ risulti biunivoca, ad esempio $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3}{2}\pi\right]$, $\left[\frac{3}{2}\pi\,;\,\frac{5}{2}\pi\right]$, ...

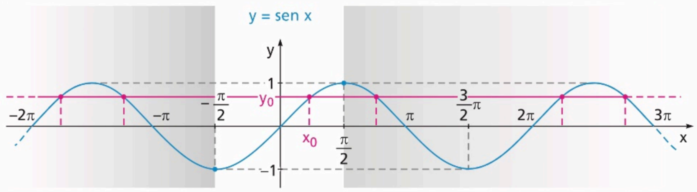


FIGURA 42

La funzione inversa della funzione seno, ristretta all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, si chiama **arcoseno** ed è indicata con il simbolo *arc sen*. Si ha quindi:

$$x = arc\,sen\,y \quad \longleftrightarrow \quad y = sen\,x \qquad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \; -1 \le y \le 1$$

Nei testi di lingua inglese l'inversa della funzione seno è indicata con il termine *arcsine*, abbreviato **arcsin**.

Scambiando x e y si ottiene l'equazione della funzione arcoseno nella forma $y = f(x)$:

$$\boxed{y = arc\,sen\,x \quad \longleftrightarrow \quad x = sen\,y \qquad -1 \le x \le 1, \; -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}}$$

Osserviamo che l'equazione $x = sen\,y$ si ottiene da $y = sen\,x$ scambiando tra loro le variabili x e y. Pertanto, per ottenere il grafico di $y = arc\,sen\,x$ basta applicare al grafico di $y = sen\,x$, nell'intervallo $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, la simmetria rispetto alla bisettrice del 1°-3° quadrante (**FIGURA 43**).

- La funzione arcoseno ha per dominio l'intervallo chiuso $[-1\,;\,1]$ e per codominio l'intervallo chiuso $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

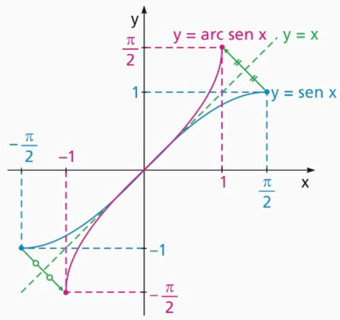


FIGURA 43

- Se $0 < x < 1$, allora $arc\,sen\,x > 0$ rappresenta la misura in radianti di un angolo orientato del primo quadrante.
  Se $-1 < x < 0$, allora $arc\,sen\,x < 0$ rappresenta la misura in radianti di un angolo orientato del quarto quadrante.
- La funzione arcoseno è *crescente* nel suo dominio:
  $$-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1 \longrightarrow arc\,sen\,x_1 < arc\,sen\,x_2$$
- Si ha $arc\,sen\,(-x) = -arc\,sen\,x$: la funzione arcoseno è una funzione *dispari* e il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine.

ESEMPI

1 Determiniamo $arc\,sen\,\frac{1}{2}$.

Sappiamo che $sen\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$. Perciò $arc\,sen\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

2 Determiniamo $sen\left(arc\,sen\,\frac{3}{5}\right)$.

Per definizione $arc\,sen\,\frac{3}{5}$ rappresenta la misura in radianti di un angolo (del primo quadrante) il cui seno è $\frac{3}{5}$. Perciò deduciamo che $sen\left(arc\,sen\,\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$.

3 Determiniamo $arc\,sen\left(sen\,\frac{7}{3}\pi\right)$.

Si ha $sen\,\frac{7}{3}\pi = sen\left(\frac{7}{3}\pi - 2\pi\right) = sen\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, e quindi $arc\,sen\left(sen\,\frac{7}{3}\pi\right) = arc\,sen\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Ragionando come nell'esempio **1**, si trova che è $arc\,sen\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$. Concludiamo che

$$arc\,sen\left(sen\,\frac{7}{3}\pi\right) = \frac{\pi}{3}$$

4 Determiniamo $arc\,sen\,2$.
La funzione $y = arc\,sen\,x$ è definita per $-1 \leq x \leq 1$; pertanto $arc\,sen\,2$ non esiste.

Il risultato dell'esempio **2** può essere così generalizzato:

$$sen\,(arc\,sen\,x) = x \quad \text{per} \quad -1 \leq x \leq 1$$

Se non si ha $-1 \leq x \leq 1$ non esiste $arc\,sen\,x$ e quindi l'uguaglianza non ha senso.

ATTENZIONE!
L'uguaglianza $arc\,sen\,(sen\,x) = x$, come mostra l'esempio **3**, può non essere vera: lo è solo se x appartiene al codominio della funzione arcoseno, ossia se è $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

20. Arcocoseno

Come la funzione seno, anche la funzione coseno non è iniettiva e perciò non è invertibile.
Per definire l'inversa della funzione $y = cos\,x$ restringiamo il dominio all'intervallo chiuso $[0\,;\,\pi]$: in tal modo, a un dato valore y_0, compreso tra -1 e 1, resta associato un solo valore x_0 tale che $y_0 = cos\,x_0$ (**FIGURA 44**).

Come per la funzione seno, anche la scelta di restringere il dominio della funzione coseno all'intervallo $[0\,;\,\pi]$ è convenzionale. Tuttavia, in questo caso, non possiamo scegliere un intervallo simmetrico rispetto all'origine poiché la funzione coseno, essendo pari, non è ivi iniettiva.

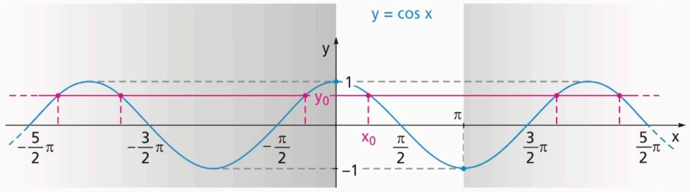


FIGURA 44

Nei testi di lingua inglese l'inversa della funzione coseno è indicata con il termine *arccosine*, abbreviato **arccos**.

Possiamo così definire la funzione inversa della restrizione della funzione coseno all'intervallo $[0\,;\,\pi]$: essa si chiama **arcocoseno** ed è indicata con il simbolo *arc cos*.

Si ha quindi:

$$x = arc\cos y \quad \longleftrightarrow \quad y = \cos x \qquad 0 \le x \le \pi,\ -1 \le y \le 1$$

Scambiando x e y si ottiene l'equazione della funzione arcoseno nella forma $y = f(x)$:

$$\boxed{y = arc\cos x \quad \longleftrightarrow \quad x = \cos y \qquad -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \pi}$$

Osserviamo che l'equazione $x = \cos y$ si ottiene da $y = \cos x$ scambiando tra loro le variabili x e y. Pertanto, per ottenere il grafico di $y = arc\cos x$ basta applicare al grafico di $y = \cos x$, nell'intervallo $0 \le x \le \pi$, la simmetria rispetto alla bisettrice del 1°- 3° quadrante (**FIGURA 45**).

- La funzione arcocoseno ha per dominio l'intervallo chiuso $[-1\,;\,1]$ e per codominio l'intervallo chiuso $[0\,;\,\pi]$.
- Se $0 < x < 1$, allora $arc\cos x > 0$ rappresenta la misura in radianti di un angolo orientato del primo quadrante.
  Se $-1 < x < 0$, allora $arc\cos x > 0$ rappresenta la misura in radianti di un angolo orientato del secondo quadrante.

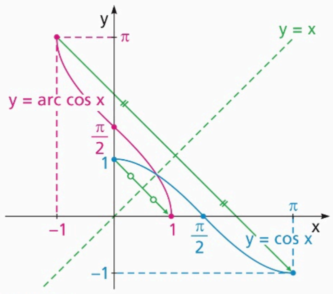


FIGURA 45

- La funzione arcocoseno è *decrescente* nel suo dominio:

$$-1 \le x_1 < x_2 \le 1 \quad \longrightarrow \quad arc\cos x_1 > arc\cos x_2$$

OSSERVAZIONE

Le considerazioni fatte per la funzione arcoseno si possono estendere alla funzione arcocoseno:

- $\cos(arc\cos x) = x$ per $-1 \le x \le 1$
- l'uguaglianza $arc\cos(\cos x) = x$ vale solo se x appartiene al codominio della funzione arcocoseno, cioè se è $0 \le x \le \pi$.

ESEMPI

1 Determiniamo $arc\cos \frac{1}{2}$.

Sappiamo che $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ e $0 \le \frac{\pi}{3} \le \pi$. Perciò $arc\cos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

2 Determiniamo $sen\left(arc\cos\frac{12}{13}\right)$.

Dobbiamo determinare il seno dell'angolo la cui misura in radianti è $\alpha = arc\cos\frac{12}{13}$; pertanto $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ e $0 < \alpha < \pi$.

Sappiamo che

$$sen\,\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \quad \longrightarrow \quad sen\,\alpha = \pm\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \pm\frac{5}{13}$$

Per determinare il segno ricordiamo che per $0 \le \alpha \le \pi$ è $sen\,\alpha \ge 0$. Possiamo perciò concludere che $sen\left(arc\cos\frac{12}{13}\right) = \frac{5}{13}$.

Matematica e modelli: scala reale?

21. Arcotangente

Anche la funzione tangente non è invertibile nel suo dominio, non essendo iniettiva.

Per definire l'inversa della funzione $y = \tan x$ restringiamo il dominio all'intervallo aperto $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; in tal modo, a un assegnato valore reale y_0 resta associato un solo valore x_0 tale che $y_0 = \tan x_0$ (**FIGURA 46**).

Restringiamo il dominio della funzione tangente all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ perché simmetrico rispetto all'origine, come il grafico della funzione $y = \tan x$.

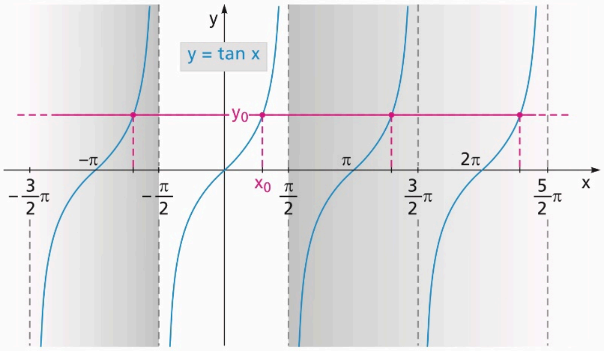


FIGURA 46

Possiamo così definire la funzione inversa della restrizione della funzione tangente all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; essa si chiama **arcotangente** ed è indicata con il simbolo *arc tan*. Si ha quindi:

$$x = \arctan y \quad \longleftrightarrow \quad y = \tan x \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Nei testi di lingua inglese l'inversa della funzione tangente è indicata con il termine *arctangent*, abbreviato **arctan**.

Scambiando x e y si ottiene l'equazione della funzione arcotangente nella forma $y = f(x)$:

$$\boxed{y = \arctan x \quad \longleftrightarrow \quad x = \tan y \qquad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}}$$

Pertanto, per ottenere il grafico di $y = \arctan x$ basta applicare al grafico di $y = \tan x$, nell'intervallo $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, la simmetria rispetto alla bisettrice del 1°- 3° quadrante (**FIGURA 47**).

- La funzione $y = \arctan x$ ha per dominio $\mathbb{R}$ e per codominio l'intervallo aperto $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

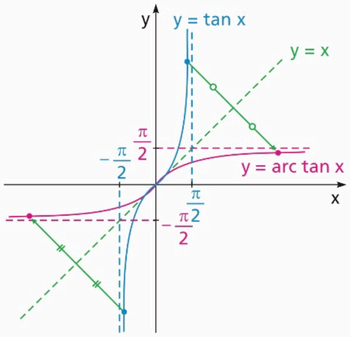


FIGURA 47