

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

A COSA SERVONO? A RISPONDERE A QUESTO TIPO DI DOMANDE ...

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = ?$$

SAPENDO CHE $\cot d = -3$ $\frac{3}{2}\pi \leq d \leq 2\pi$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - d\right) = ?$$

$$\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = ?$$

SAPENDO CHE $\cos d = -\frac{1}{3}$ $\frac{\pi}{2} \leq d \leq \pi$

$$\cot\left(\frac{\pi}{4} + d\right) = ?$$

DICIAMO SUBITO COSA **NON** FARE ... $\tan(45^\circ + 30^\circ) = \tan 45^\circ + \tan 30^\circ$ **ERRATO**

$$\sin 15^\circ = \sin 45^\circ - \sin 30^\circ$$
 ERRATO

IN GENERALE RICORDA CHE...

$$\sin(d + \beta) \neq \sin d + \sin \beta$$

ALTRIMENTI SI AVREBBE : $\sin 90^\circ = \sin(45^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ **ERRATO**

QUINDI COME FARE ? OCCORRE CONOSCERE E SAPER UTILIZZARE LE

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

$$\sin(d + \beta) = \sin d \cdot \cos \beta + \cos d \cdot \sin \beta$$

$$\sin(d - \beta) = \sin d \cdot \cos \beta - \cos d \cdot \sin \beta$$

$$\cos(d + \beta) = \cos d \cdot \cos \beta - \sin d \cdot \sin \beta$$

$$\cos(d - \beta) = \cos d \cdot \cos \beta + \sin d \cdot \sin \beta$$

COME RICORDARLE?



(IN QUESTA LEZIONE NON LE DIMOSTREREMO, LO FAREMO IN UN APPROFONDIMENTO A PARTE...)

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE IN "FILASTROCCA"

MOLTE "STRANE FORMULE" GONIOMETRICHE
SI POSSONO RICORDARE USANDO LA "FILASTROCCA"

SE	CO	CO	SE
CO	CO	SE	SE

CHE COS'E'?

$$\sin(d + b) = \sin d \cdot \cos b + \cos d \cdot \sin b$$

$$\sin(d - b) = \sin d \cdot \cos b - \cos d \cdot \sin b$$

$$\cos(d + b) = \cos d \cdot \cos b - \sin d \cdot \sin b$$

$$\cos(d - b) = \cos d \cdot \cos b + \sin d \cdot \sin b$$

UN METODO MNEMONICO

PER RICORDARE LE 4 FORMULE



Poco "MATEMATICO" MA FUNZIONA!!

E CONSIDERANDO CHE...

SIN E' LA FUNZIONE

UBBIDIENTE : SE C'E' IL + METTE IL + SE C'E' IL - METTE IL -

E ALTRUISTA : UNO A ME ($\sin d$) E UNO A TE ($\cos b$)
UNO A TE ($\cos d$) E UNO A ME ($\sin b$)

COS E' LA FUNZIONE

DISUBBIDIENTE : SE C'E' IL + METTE IL - SE C'E' IL - METTE IL +

ED EGOISTA : PRIMA TUTTO A ME ($\cos d \cdot \cos b$)
POI TUTTO A TE ($\sin d \cdot \sin b$)

CURIOSO VERO?

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

TERNA MAGICA

$$\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(d+\beta) = \sin d \cdot \cos \beta + \cos d \cdot \sin \beta$$

$$\sin(d-\beta) = \sin d \cdot \cos \beta - \cos d \cdot \sin \beta$$

$$\cos(d+\beta) = \cos d \cdot \cos \beta - \sin d \cdot \sin \beta$$

$$\cos(d-\beta) = \cos d \cdot \cos \beta + \sin d \cdot \sin \beta$$

APPLICHIAMOLE SUBITO

$$\begin{aligned} 1. \sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin d \cdot \cos \beta - \cos d \cdot \sin \beta = \\ &= \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

N.B.

$$15^\circ = \frac{\pi}{12}$$

$$\pi/12 = 30^\circ$$

$$2. \text{SAPEENDO CHE } \cos d = -\frac{1}{3} \quad \frac{\pi}{2} \leq d \leq \pi \quad \cos\left(\frac{\pi}{3} - d\right) = ?$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{3} - d\right) &= \cos d \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin d \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \\ &= \cos d \cdot \frac{1}{2} + \sin d \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \cos d + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin d \end{aligned}$$

$$\sin d = +\sqrt{1 - \cos^2 d} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2}$$

to be continued

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

TERNA MAGICA

$$\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

PROVACI TU...

1. $\sin 105^\circ = \sin \frac{7}{12} \pi = ?$

2. $\cos 15^\circ = \cos \frac{\pi}{12} = ?$

3. $\sin 75^\circ = \sin \frac{5}{12} \pi = ?$
 $30^\circ + 45^\circ$

4. $\sin \frac{\pi}{15} = \sin 12^\circ = ?$

5. $\sin 42^\circ = ?$



$$\begin{aligned} \sin(d+\beta) &= \sin d \cdot \cos \beta + \cos d \cdot \sin \beta \\ \sin(d-\beta) &= \sin d \cdot \cos \beta - \cos d \cdot \sin \beta \\ \cos(d+\beta) &= \cos d \cdot \cos \beta - \sin d \cdot \sin \beta \\ \cos(d-\beta) &= \cos d \cdot \cos \beta + \sin d \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

QUATERNA AUREA

$$\frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \\ \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5} \quad \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}$$



6. SAPENDO CHE $\sin d = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ $\frac{3}{2}\pi \leq d \leq 2\pi$ $\cos\left(\frac{\pi}{6} + d\right) = ?$

7. SAPENDO CHE $\cot d = -3$ $\frac{\pi}{2} \leq d \leq \pi$ $\sin\left(\frac{\pi}{4} - d\right) = ?$

8. SAPENDO CHE $\tan d = \sqrt{6}$ $\pi \leq d \leq \frac{3}{2}\pi$ $\cos\left(\frac{\pi}{3} + d\right) = ?$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

APPLICHIAMOLE SUBITO PER DIMOSTRARE:

LE FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE
DI TANGENTE E COTANGENTE

$$\tan(d \mp B) = \frac{\tan d \mp \tan B}{1 \pm \tan d \cdot \tan B}$$

$$\cot(d \mp B) = \frac{1 \pm \cot d \cdot \cot B}{\cot d \mp \cot B}$$

$$\sin(d \mp B) = \sin d \cdot \cos B \pm \cos d \cdot \sin B$$

$$\sin(d \mp B) = \sin d \cdot \cos B \mp \cos d \cdot \sin B$$

$$\cos(d \mp B) = \cos d \cdot \cos B \mp \sin d \cdot \sin B$$

$$\cos(d \mp B) = \cos d \cdot \cos B \pm \sin d \cdot \sin B$$

$$\tan(d \mp B) = \frac{\sin(d \mp B)}{\cos(d \mp B)} = \frac{\sin d \cdot \cos B \mp \cos d \cdot \sin B}{\cos d \cdot \cos B \pm \sin d \cdot \sin B} =$$

COSÌ FARE PER ESPRIMERE LA FORMULA IN FUNZIONE DI TANGENTE?
DIVIDEREMO TUTTI PER $\cos d \cdot \cos B$

$$= \frac{\frac{\sin d \cdot \cos B}{\cos d \cdot \cos B} \mp \frac{\cos d \cdot \sin B}{\cos d \cdot \cos B}}{1 \pm \frac{\sin d \cdot \sin B}{\cos d \cdot \cos B}} = \frac{\tan d \mp \tan B}{1 \pm \tan d \cdot \tan B}$$

ANALOGAMENTE PER LA COTANGENTE: $\cot(d \mp B) =$

$$= \frac{\cos(d \mp B)}{\sin(d \mp B)} = \frac{\frac{\cos d \cdot \cos B}{\sin d \cdot \sin B} \pm \frac{1 \cdot \sin d \cdot \sin B}{\sin d \cdot \sin B}}{\frac{\sin d \cdot \cos B}{\sin d \cdot \sin B} \mp \frac{\cos d \cdot \sin B}{\sin d \cdot \sin B}} = \frac{\cot d \cdot \cot B \pm 1}{\cot B \mp \cot d}$$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

TERNA MAGICA

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad 1 \quad \sqrt{3}$$

APPLICHIAMOLE SUBITO

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \pm \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{1 \pm \cot \alpha \cdot \cot \beta}{\cot \alpha \mp \cot \beta}$$

1. $\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3 + \sqrt{3}}{3}}{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}} \\ &= \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{9 + 3 + 6\sqrt{3}}{9 - 3} = \frac{6(2 + \sqrt{3})}{6} = 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

2. SAPENDO CHE $\cos d = -\frac{1}{3}$ $\frac{\pi}{2} \leq d \leq \pi$ $\cot\left(\frac{\pi}{4} + d\right) = ?$

$$\cot\left(\frac{\pi}{4} + d\right) = \frac{\cot \frac{\pi}{4} \cdot \cot d \pm 1}{\cot \frac{\pi}{4} \mp \cot d}$$

OCCORRE PRIMA TROVARE $\cot d$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

TERNA MAGICA

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad 1 \quad \sqrt{3}$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \pm \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta \pm 1}{\cot \alpha \mp \cot \beta}$$

PROVACI TU...

1. $\cot \frac{7}{12} \pi = \cot 105^\circ = ?$

2. $\tan \frac{\pi}{12} = \tan 15^\circ = ?$

3. $\tan \frac{5}{12} \pi = \tan 75^\circ = ?$

$30^\circ + 45^\circ$

4. $\tan \frac{\pi}{15} = \tan 12^\circ = ?$

VERY DIFFICULT ...

5. $\tan 42^\circ = ?$



QUATERNA AUREA

$$\frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5} \quad \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}$$



6. SAPENDO CHE $\tan \alpha = \sqrt{2}$ $\frac{3}{2}\pi \leq \alpha \leq 2\pi$ $\cot\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) = ?$

7. SAPENDO CHE $\cot \alpha = -3$ $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = ?$

8. SAPENDO CHE $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ $\pi \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$ $\cot\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = ?$

È NATA UNA NUOVA FAMIGLIA DI ARCHI ASSOCIATA A

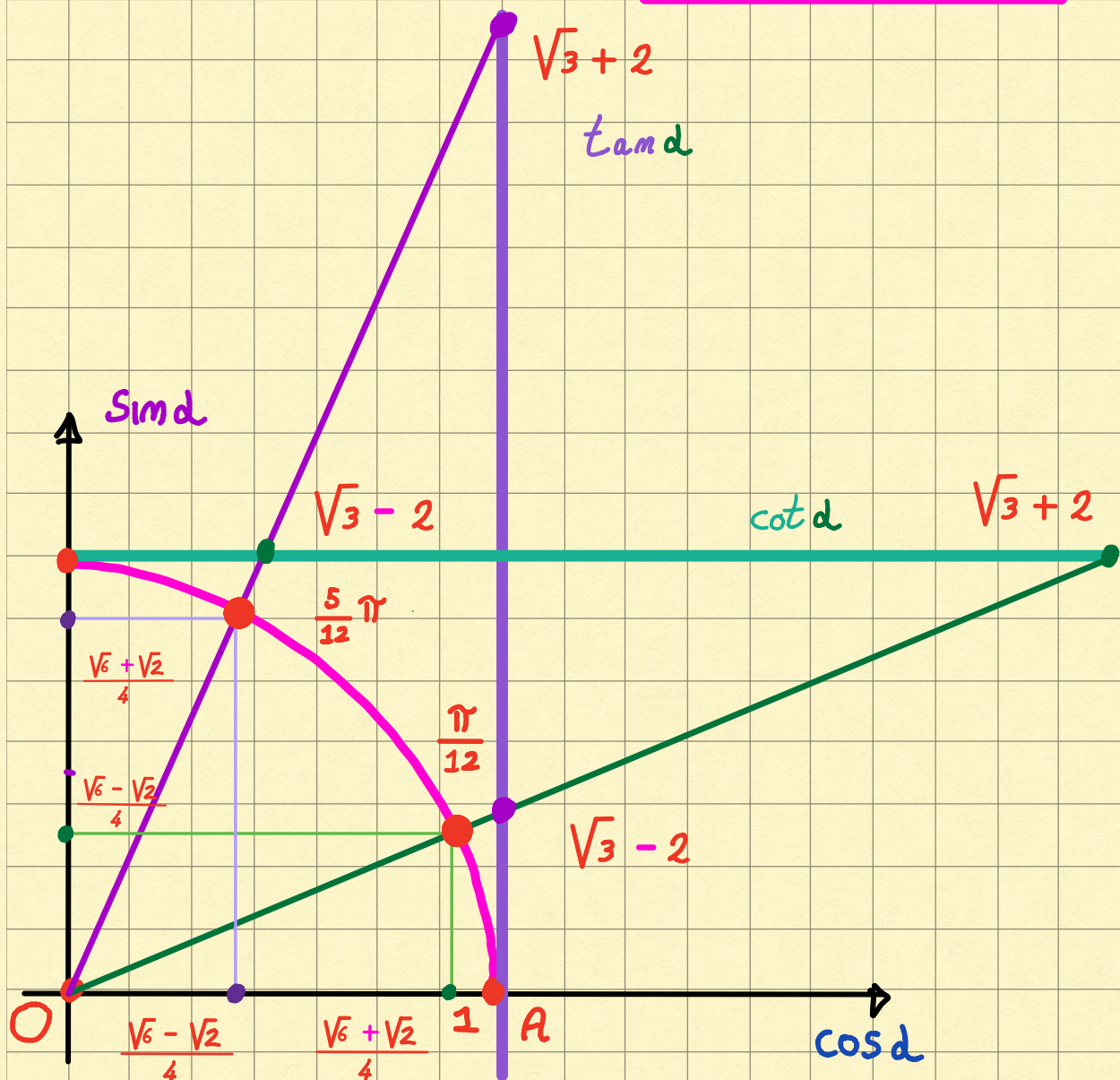
$$\frac{\pi}{12} = 15^\circ$$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

FACILI DA RICORDARE ...

LA COPPIA MAGICA dei
DODICESIMI

$$\frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4} \quad \sqrt{3} \pm 2$$

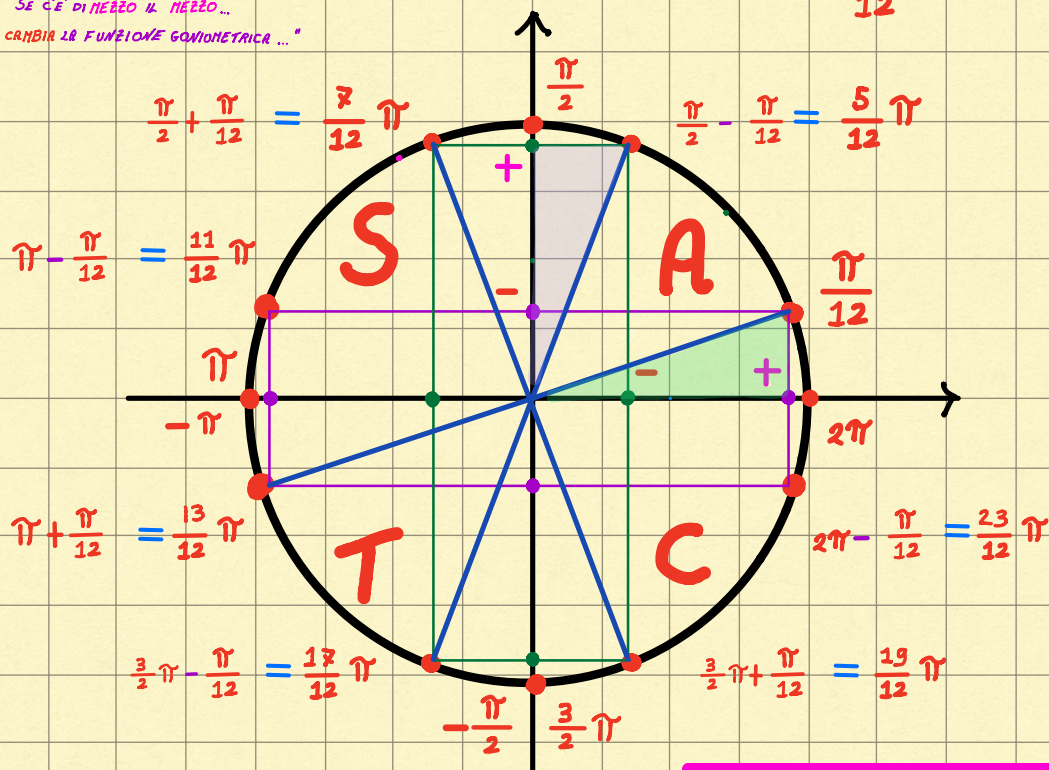


GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

ARCHI ASSOCIATI A

$$\frac{\pi}{12} = 15^\circ$$

" SE C'È DIMEZZO IL MEZZO ...
... CAMBIA LA FUNZIONE GONIOMETRICA ... "



LA COPPIA MAGICA dei
DODICESIMI

$$\frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4} \quad \sqrt{3} \pm 2$$

$$\tan \frac{13}{12} \pi = + \tan \frac{\pi}{12} =$$

$$\cot \frac{19}{12} \pi = - \tan \frac{\pi}{12} =$$

PROVACI TU...

$$\tan \frac{17}{12} \pi =$$

$$\cot \frac{23}{12} \pi =$$

$$\sin \frac{5}{12} \pi = + \cos \frac{\pi}{12} =$$

$$\cos \frac{7}{12} \pi = - \sin \frac{\pi}{12} =$$

$$\sin \frac{25}{12} \pi =$$

$$\cos \frac{29}{12} \pi =$$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

LE SEMPLICISSIME FORMULE DI DUPLICAZIONE

SI DIMOSTRANO FACILMENTE

UTILIZZANDO LE

FORMULE DI ADDIZIONE

E TENENDO PRESENTE CHE :

$$2d = d + d$$

$$\sin(d+B) = \sin d \cdot \cos B + \cos d \cdot \sin B$$

$$\cos(d+B) = \cos d \cdot \cos B - \sin d \cdot \sin B$$

$$\tan(d+B) = \frac{\tan d + \tan B}{1 - \tan d \cdot \tan B}$$

$$\cot(d+B) = \frac{\cot d \cdot \cot B - 1}{\cot d + \cot B}$$

$$\sin 2d = \sin(d+d) = \sin d \cdot \cos d + \cos d \cdot \sin d = 2 \sin d \cos d$$

$$\cos 2d = \cos(d+d) = \cos d \cdot \cos d - \sin d \cdot \sin d =$$

$$= \cos^2 d - \sin^2 d = 2 \cos^2 d - 1$$

$$\cos^2 d + \sin^2 d = 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 d$$

$$\tan 2d = \tan(d+d) = \frac{\tan d + \tan d}{1 - \tan d \cdot \tan d} = \frac{2 \tan d}{1 - \tan^2 d}$$

$$\cot 2d = \cot(d+d) = \frac{\cot d \cdot \cot d - 1}{\cot d + \cot d} = \frac{\cot^2 d - 1}{2 \cot d}$$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

FORMULE DI DUPLICAZIONE

$$\sin 2d = 2 \sin d \cos d$$

$$\cos 2d = \cos^2 d - \sin^2 d = 2 \cos^2 d - 1 = 1 - 2 \sin^2 d$$

$$\tan 2d = \frac{2 \tan d}{1 - \tan^2 d} \quad \cot 2d = \frac{\cot^2 d - 1}{2 \cot d}$$

APPLICHIAMOLE SUBITO

1. SAPENDO CHE $\cos d = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ $\pi \leq d \leq \frac{3}{2}\pi$ $\sin 2d = ?$

2. SAPENDO CHE $\sin d = \frac{3}{5}$ $\frac{\pi}{2} \leq d \leq \pi$ $\cos 2d = ?$

3. SAPENDO CHE $\tan d = \sqrt{2}$ $\frac{3}{2}\pi < d \leq 2\pi$ $\tan 2d = ?$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

PROVACI TU...

1. SAPENDO CHE $\sin d = \frac{3}{4}$ $\frac{\pi}{2} \leq d \leq \pi$
TROVA:

a) $\cos\left(d - \frac{\pi}{3}\right) = ?$ b) $\sin 2d = ?$

c) $\cot\left(\frac{\pi}{6} - 2d\right) = ?$

2. SAPENDO CHE $\cos d = -\frac{1}{5}$ $\pi \leq d \leq \frac{3}{2}\pi$
TROVA:

a) $\sin\left(d - \frac{\pi}{6}\right) = ?$ b) $\tan 2d = ?$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2d\right) = ?$

3. SAPENDO CHE $\tan d = -\sqrt{5}$ $\frac{3}{2}\pi \leq d \leq 2\pi$
TROVA:

a) $\sin\left(\frac{5}{4}\pi - 2d\right) = ?$ b) $\cos\left(\frac{5}{3}\pi + 2d\right) = ?$

c) $\cot\left(2d - \frac{5}{6}\pi\right) = ?$



