

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

FORMULE DI PROSTAFERESI

(PROSTHESIS : SOMMA AFFAIRESES : DIFFERENZA)

CI CONSENTONO DI PASSARE DA UNA SOMMA O DIFFERENZA
TRA 2 SENI O 2 COSENI AD UN PRODOTTO...

SONO MOLTO DIFFICILI DA RICORDARE; PROVAMO AD
IMPARARLE ATTRAVERSO UNA TECNICA MNEMONICA :

PRIMA SENO	POI COSENO
PRIMA SOMMO	POI SOTTRAGGO

IN QUESTO MODO IMPARO A DISPORRE LE 4
FORMULE NELLA GIUSTA SEQUENZA

$\sin p + \sin q$	}	PRIMA SENO	PRIMA SOMMO
$\sin p - \sin q$			POI SOTTRAGGO

$\cos p + \cos q$	}	POI COSENO	PRIMA SOMMO
$\cos p - \cos q$			POI SOTTRAGGO

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

FORMULE DI PROSTFERESI TECNICA MNEMONICA

ADESSO APPLICHIAMO LA FILASTROCCA DELLA GALLINA

SE	CO	CO	SE
CO	CO	SE	SE

$$\begin{array}{lcl}
 \sin p + \sin q = ? \sin ? & \cos ? & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{SE} & \text{CO} \\ \hline \end{array} \\
 \sin p - \sin q = ? \cos ? & \sin ? & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{CO} & \text{SE} \\ \hline \end{array} \\
 \cos p + \cos q = ? \cos ? & \cos ? & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{CO} & \text{CO} \\ \hline \end{array} \\
 \cos p - \cos q = ? \sin ? & \sin ? & \begin{array}{|c|c|} \hline \text{SE} & \text{SE} \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

ADESSO APPLICHIAMO PRIMA LA SEMISOMMA $\frac{p+q}{2}$
DOPO LA SEMIDIFFERENZA : $\frac{p-q}{2}$

$$\begin{array}{lcl}
 \sin p + \sin q = ? \sin \frac{p+q}{2} & \cos \frac{p-q}{2} & \\
 \sin p - \sin q = ? \cos \frac{p+q}{2} & \sin \frac{p-q}{2} & \\
 \cos p + \cos q = ? \cos \frac{p+q}{2} & \cos \frac{p-q}{2} & \\
 \cos p - \cos q = ? \sin \frac{p+q}{2} & \sin \frac{p-q}{2} &
 \end{array}$$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

FORMULE DI PROSTAFERESI TECNICA MNEMONICA

INFINE "COMPENSARHO" LA SEMISOMMA E LA SEMIDIFFERENZA MOLTIPLICANDO PER 2;

E SISTEMIAMO LA FORMULA FINALE (IL COSENO È DISUBBIDIENTE) CAMBIANDO L'ULTIMO SEGNO

ECCO QUAR LE 4 FORMULE:

$$\begin{aligned}\sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \\ \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}\end{aligned}$$

APPLICHIAMONE SUBITO UNA ...

È LA 4^a

$$\begin{aligned}\cos 4x - \cos 2x &\stackrel{\downarrow}{=} -2 \sin \frac{4x+2x}{2} \sin \frac{4x-2x}{2} = \\ &= -2 \sin \frac{3}{2}x \sin \frac{1}{2}x = -2 \sin 3x \sin x\end{aligned}$$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

FORMULE DI PROSTAFERESI DIMOSTRAZIONE

SI CONSIDERANO LE FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE
INIZIAMO DA QUELLE DEL SENO

$$\begin{aligned} \text{sen}(d + B) &= \text{SE}_m d \cdot \text{CO}_s B + \text{CO}_s d \cdot \text{SE}_m B \\ &+ \quad (-) \quad + \quad (-) \quad + \quad (-) \end{aligned}$$

$$\text{sen}(d - B) = \text{SE}_m d \cdot \text{CO}_s B - \text{CO}_s d \cdot \text{SE}_m B$$

PRIMA SOMMIAMO MEMBRO A MEMBRO

$$\begin{aligned} \text{sen}(d + B) + \text{sen}(d - B) &= \text{SE}_m d \cdot \text{CO}_s B + \text{SE}_m d \cdot \text{CO}_s B + \\ &+ \cancel{\text{CO}_s d \cdot \text{SE}_m B} - \cancel{\text{CO}_s d \cdot \text{SE}_m B} = 2 \text{SE}_m d \cdot \text{CO}_s B \end{aligned}$$

DOPO SOTTRAIAMO MEMBRO A MEMBRO

$$\begin{aligned} \text{sen}(d + B) - \text{sen}(d - B) &= \cancel{\text{SE}_m d \cdot \text{CO}_s B} - \cancel{\text{SE}_m d \cdot \text{CO}_s B} + \\ &+ \text{CO}_s d \cdot \text{SE}_m B + \text{CO}_s d \cdot \text{SE}_m B = 2 \text{CO}_s d \cdot \text{SE}_m B \end{aligned}$$

$$\text{IN SINTESI: } \text{sen}(d + B) + \text{sen}(d - B) = 2 \text{SE}_m d \cdot \text{CO}_s B$$

$$\text{sen}(d + B) - \text{sen}(d - B) = 2 \text{CO}_s d \cdot \text{SE}_m B$$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

FORMULE DI PROSTAFERESI

DIMOSTRAZIONE

ADESSO SI CONSIDERANO LE FORMULE DI ADDIZIONE
E SOTTRAZIONE DEL COSENO

$$\cos(d+B) = \cos d \cdot \cos B - \sin d \cdot \sin B$$

+ (-) + (-) + (-)

$$\cos(d-B) = \cos d \cdot \cos B + \sin d \cdot \sin B$$

PRIMA SOMMIAMO E DOPO SOTTRAIAMO MEMBRO A MEMBRO

$$\begin{aligned} \cos(d+B) + \cos(d-B) &= \cos d \cdot \cos B + \cos d \cdot \cos B + \\ &\quad - \sin d \cdot \sin B + \sin d \cdot \sin B = 2 \cos d \cdot \cos B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(d+B) - \cos(d-B) &= \cancel{\cos d \cdot \cos B} - \cancel{\cos d \cdot \cos B} + \\ &\quad - \sin d \cdot \sin B - \sin d \cdot \sin B = -2 \sin d \cdot \sin B \end{aligned}$$

$$\text{IN SINTESI : } \cos(d+B) + \cos(d-B) = 2 \cos d \cdot \cos B$$

$$\cos(d+B) - \cos(d-B) = -2 \sin d \cdot \sin B$$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

FORMULE DI PROSTAFERESI DIMOSTRAZIONE

ABBIAMO TROVATO:

*

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

ADesso poniamo:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = p \\ \alpha - \beta = q \end{cases}$$

E TROVIAMO α E β

$$\begin{cases} \alpha + \beta = p \\ + \quad + \quad + \\ \alpha - \beta = q \end{cases}$$

$$2\alpha = p + q$$

$$\alpha = \frac{p + q}{2}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = p \\ - \quad - \quad - \\ \alpha - \beta = q \end{cases}$$

$$2\beta = p - q$$

$$\beta = \frac{p - q}{2}$$

SOSTITUENDO IN * AVREMO:

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2}$$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

FORMULE DI PROSTAFERESI

$$\begin{aligned}\sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \\ \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}\end{aligned}$$

Ex 1.

$$\sin 80^\circ - \sin 50^\circ =$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$= 2 \cos \frac{80^\circ + 50^\circ}{2} \sin \frac{80^\circ - 50^\circ}{2} =$$

$$= 2 \cos 65^\circ \sin 15^\circ$$

Ex 2.

$$\cos 70^\circ + \cos 20^\circ =$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$= 2 \cos \frac{70^\circ + 20^\circ}{2} \cos \frac{70^\circ - 20^\circ}{2} =$$

$$= 2 \cos 45^\circ \cos 25^\circ = \sqrt{2} \cos 25^\circ$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

FORMULE DI WERNER

CI CONSENTONO DI PASSARE DA UN PRODOTTO AD
UNA SOMMA O DIFFERENZA TRA 2 SENI O 2 COSENI ...

(LE FORMULE INVERSE DI PROSTAFERESI)

SI CONSIDERANO LE 4 RELAZIONI OTTENUTE SOMMANDO E DOPO
SOTTRAENDO MEMBRO A MEMBRO NELLE FORMULE DI ADDIZIONE

$$\sin(d+B) + \sin(d-B) = 2 \sin d \cdot \cos B \quad 1$$

$$\sin(d+B) - \sin(d-B) = 2 \cos d \cdot \sin B \quad \neq$$

$$\cos(d+B) + \cos(d-B) = 2 \cos d \cdot \cos B \quad 2$$

$$\cos(d+B) - \cos(d-B) = -2 \sin d \cdot \sin B \quad 3$$

E RICAVIAMO I PRODOTTI FINALI:

$$1 \quad \sin d \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\sin(d+B) + \sin(d-B)]$$

$$2 \quad \cos d \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\cos(d+B) + \cos(d-B)]$$

$$3 \quad \sin d \cdot \sin B = -\frac{1}{2} [\cos(d+B) - \cos(d-B)]$$

N.B. LA FORMULA INVERSA DI $\neq$ CI FORNISCE UNA ESPRESSIONE EQUIVALENTE ALLA 1

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

FORMULE DI WERNER

$$1 \quad \text{SE}_{m\alpha} \cdot \text{CO}_{s\beta} = \frac{1}{2} \left[\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta) \right]$$

$$2 \quad \text{CO}_{s\alpha} \cdot \text{CO}_{s\beta} = \frac{1}{2} \left[\text{cos}(\alpha + \beta) + \text{cos}(\alpha - \beta) \right]$$

$$3 \quad \text{SE}_{m\alpha} \cdot \text{SE}_{m\beta} = -\frac{1}{2} \left[\text{cos}(\alpha + \beta) - \text{cos}(\alpha - \beta) \right]$$

Ex 1.

$$\text{Sin } 15^\circ \text{ cos } 65^\circ =$$

$$\frac{1}{2} \left[\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\text{sen}(15^\circ + 65^\circ) + \text{sen}(15^\circ - 65^\circ) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\text{sen } 80^\circ + \text{sen}(-50^\circ) \right] = \frac{1}{2} \left[\text{sen } 80^\circ - \text{sen } 50^\circ \right]$$

Ex 2.

$$\text{cos } 5x \cdot \text{cos } 3x =$$

$$\frac{1}{2} \left[\text{cos}(\alpha + \beta) + \text{cos}(\alpha - \beta) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\text{cos}(5x + 3x) + \text{cos}(5x - 3x) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\text{cos } 8x + \text{cos } 2x \right]$$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

PROVACI TU...

APPLICA LE FORMULE DI

PROSTRFERESI ◦ WERNER

IN BASE AL CASO...

1. $\text{SE}_{m\ 3\pi} \cdot \text{CO}_{s\ \pi}$

2. $\text{SIM}_{4\pi} - \text{SIM}_{2\pi} =$

3. $\text{CO}_{s\ 55^\circ} \cdot \text{CO}_{s\ 35^\circ}$

4. $\text{COS}_{3\pi} - \text{COS}_{\pi} =$

5. $\text{COS}_{20^\circ} + \text{COS}_{10^\circ} =$

6. $\text{SE}_{m\ 4\pi} \cdot \text{SE}_{m\ 2\pi}$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

LA QUARTA FORMULA DI WERNER (NON PRESENTE NEI FORMULARI)

DALLA RELAZIONE : (LA SECONDA NELLA SEQUENZA)

$$\sin(d+B) - \sin(d-B) = 2 \cos d \cdot \sin B \quad \#$$

RICAVIAMO :

$$\cos d \cdot \sin B = \frac{1}{2} [\sin(d+B) - \sin(d-B)]$$

Ex .

$\swarrow$ E' PIU' GRANDE

$$\sin 15^\circ \cos 65^\circ = \cos 65^\circ \sin 15^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} [\sin(65^\circ + 15^\circ) - \sin(65^\circ - 15^\circ)] =$$
$$= \frac{1}{2} [\sin 80^\circ - \sin 50^\circ]$$

