

# GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

## FORMULE DI BISEZIONE

SI DIMOSTRANO FACILMENTE UTILIZZANDO LE  
FORMULE DI DUPLICAZIONE DEL COSENO:

$$\cos 2d = 2\cos^2 d - 1$$

POSTO:  $2d = \pi$  DA CUI:  $d = \frac{\pi}{2}$  SI HA:

$$\cos \pi = 2\cos^2 \frac{\pi}{2} - 1 \quad \text{DA CUI:}$$

$$2\cos^2 \frac{\pi}{2} = 1 + \cos \pi$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{2} = \frac{1 + \cos \pi}{2}$$

DA CUI:

$$\cos \frac{\pi}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \pi}{2}}$$

ANALOGAMENTE A PARTIRE DA:

$$\cos 2d = 1 - 2\sin^2 d$$

POSTO:  $2d = \pi$  DA CUI:  $d = \frac{\pi}{2}$  SI HA:

$$\cos \pi = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{2} \quad \text{DA CUI: } 2\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 - \cos \pi$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{2} = \frac{1 - \cos \pi}{2}$$

DA CUI:

$$\sin \frac{\pi}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \pi}{2}}$$

# GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

## FORMULE DI BISEZIONE DI TANGENTE E COTANGENTE

SI DIMOSTRANO FACILMENTE UTILIZZANDO LE  
FORMULE DI BISEZIONE DEL SENO E COSENO:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

CHE SI PUÒ SCRIVERE ANCHE IN UN MODO DIVERSO, MOLTIPLICANDO  
E DIVIDENDO UNA VOLTA PER  $1 + \cos \alpha$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha)^2}} = \boxed{\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

... UNA VOLTA PER  $1 - \cos \alpha$

SI PUÒ OMETTERE IL SEGNO

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{1 - \cos^2 \alpha}} = \boxed{\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}}$$

ANALOGAMENTE

$$\cot \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

# GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

APPLICHIAMOLE SUBITO: FORMULE DI BISEZIONE

$$\cos \frac{n}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos n}{2}}$$

$$\sin \frac{n}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos n}{2}}$$

$$\tan \frac{n}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos n}{1 + \cos n}} = \frac{\sin n}{1 + \cos n} = \frac{1 - \cos n}{\sin n}$$

$$\cot \frac{n}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos n}{1 - \cos n}} = \frac{1 + \cos n}{\sin n} = \frac{\sin n}{1 - \cos n}$$

TERNA MAGICA

$$\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad 1 \quad \sqrt{3}$$

$$1. \sin 15^\circ = \sin \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} =$$

UTILIZZANDO  
LA FORMULA DEI  
RADICALI DOPPI

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 15^\circ = \tan \frac{30^\circ}{2} = \frac{1 - \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{2 - \sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{3}$$

## RICHIAMO LA FORMULA DEI RADICALI DOPPI

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

APPLICHIAMOLA AL NOSTRO CASO

$$\sqrt{2 \pm \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2^2 - 3}}{2}} \pm \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2^2 - 3}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 + 1}{2}} \pm \sqrt{\frac{2 - 1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}} =$$

RAZIONALIZZANDO

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6 \pm \sqrt{2}}}{2}$$

AVENDO:

$$\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6 - \sqrt{2}}}{4}$$

P.S. MOLTO MEGLIO APPLICARE LE FORMULE DI ADDIZIONE!!

# GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

APPLICHIAMOLE SUBITO

TERNA MAGICA

$$\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad 1 \quad \sqrt{3}$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = \mp \sqrt{\frac{1 + \cos \pi}{2}} \quad \sin \frac{\pi}{2} = \mp \sqrt{\frac{1 - \cos \pi}{2}}$$

$$\tan \frac{\pi}{2} = \mp \sqrt{\frac{1 - \cos \pi}{1 + \cos \pi}} = \frac{\sin \pi}{1 + \cos \pi} = \frac{1 - \cos \pi}{\sin \pi}$$

$$\cot \frac{\pi}{2} = \mp \sqrt{\frac{1 + \cos \pi}{1 - \cos \pi}} = \frac{1 + \cos \pi}{\sin \pi} = \frac{\sin \pi}{1 - \cos \pi}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{8} &= \cos \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \mp \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \mp \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \\ &= \mp \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \mp \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \end{aligned}$$

$$\cot \frac{\pi}{8} = \cot \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \cos \pi}{\sin \pi} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} =$$

$$= \mp \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \mp \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{2} = \sqrt{2} + 1$$

SAPENDO CHE  $\cos \pi = -\frac{1}{3} \quad \frac{\pi}{2} \leq \pi \leq \pi$

$$\sin \frac{\pi}{2} = ?$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\tan \frac{\pi}{2} = ?$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = ?$$

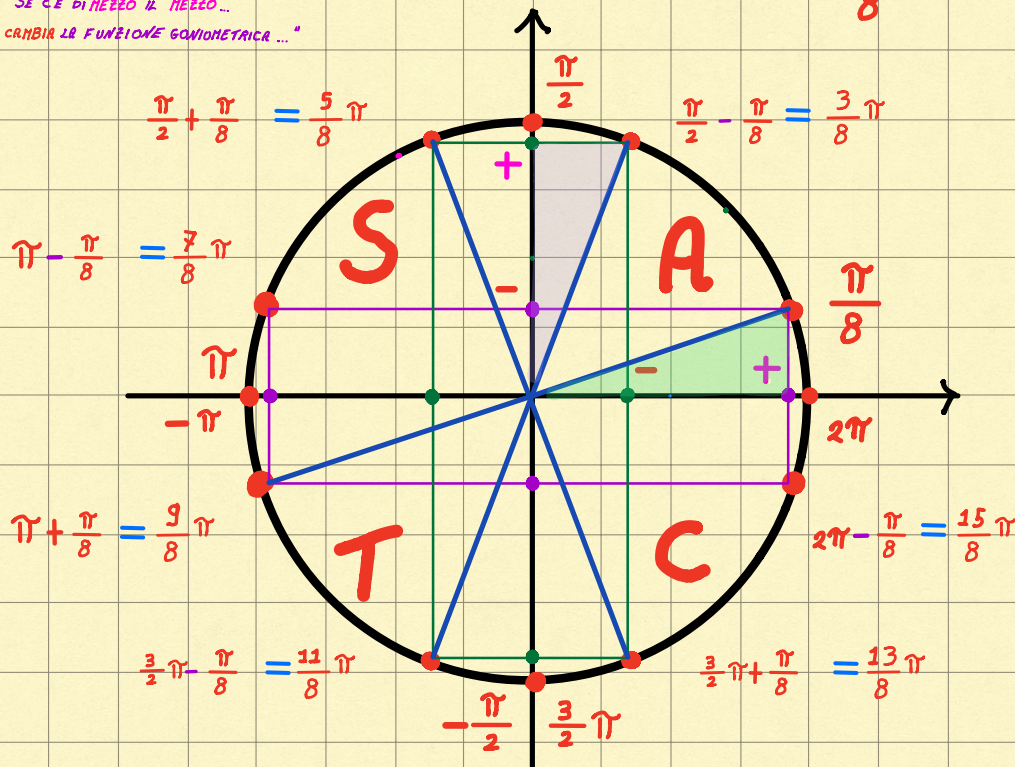
# GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

COSTRUIRE LA "FAMIGLIA DI  $\frac{\pi}{8}$ "

ARCHI ASSOCIATI A

$$\frac{\pi}{8} = 22,5^\circ$$

"SE C'È DI MEZZO IL MEZZO...  
... CAMBIA LA FUNZIONE GONIOMETRICA ..."



NUMERI "MAGICI" OTTAVI

$$\frac{\sqrt{2 \mp \sqrt{2}}}{2} \quad \sqrt{2} \mp 1$$

PROVA AD ASSOCIARE I VALORI DELLE FUNZIONI

GONIOMETRICHE RELATIVI AGLI ARCHI OTTAVI

AI NUMERI MAGICI... FACENDO MOLTA ATTENZIONE AI SEGNI.

# GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

## FORMULE PARAMETRICHE

SI DIMOSTRANO FACILMENTE UTILIZZANDO LE  
FORMULE DI DUPLICAZIONE

$$\sin 2d = 2 \sin d \cos d$$

POSTO:  $2d = \pi$  DA CUI:  $d = \frac{\pi}{2}$  SI HA:

$$\sin \pi = 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}}{\underbrace{\cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2}}_1} =$$

DIVIDENDO PER  $\cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\pi}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\sin \pi = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$t = \tan \frac{\pi}{2}$$

C.E.  $\frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} + K\pi$

$$\pi \neq \pi + 2K\pi$$

# GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

## FORMULE PARAMETRICHE

ANALOGAMENTE A PARTIRE DA:  $\cos 2d = \cos^2 d - \sin^2 d$

POSTO:  $2d = \pi$  DA CUI:  $d = \frac{\pi}{2}$  SI HA:

$$\cos \pi = \cos^2 \frac{\pi}{2} - \sin^2 \frac{\pi}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{2} - 1}{\underbrace{\cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2}}_1} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{2} - 1}{\cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{2} - 1}{1} = \cos^2 \frac{\pi}{2} - 1$$

$$= \frac{\frac{\cos^2 \frac{\pi}{2}}{\cos^2 \frac{\pi}{2}} - \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{\cos^2 \frac{\pi}{2}}}{\frac{\cos^2 \frac{\pi}{2}}{\cos^2 \frac{\pi}{2}} + \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{\cos^2 \frac{\pi}{2}}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{\pi}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\pi}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\cos \pi = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$t = \tan \frac{\pi}{2}$$

$$\pi \neq \pi + 2K\pi$$

E SEMPRE A PARTIRE DALLE FORMULE DI DUPLICAZIONE ...

$$\tan 2d = \frac{2 \tan d}{1 - \tan^2 d} \quad \text{POSTO: } 2d = \pi \quad \text{DA CUI: } d = \frac{\pi}{2} \quad \text{SI HA:}$$

$$\tan \pi = \frac{2 \tan \frac{\pi}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{2}} = \frac{2t}{1 - t^2}$$

$$\tan \pi = \frac{2t}{1 - t^2}$$

$$t = \tan \frac{\pi}{2}$$

$$\pi \neq \pi + 2K\pi$$

# GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

---

## FORMULE PARAMETRICHE

$$\sin \pi = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos \pi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\tan \pi = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$t = \tan \frac{\pi}{2} \quad \pi \neq \pi + 2K\pi$$

## APPLICAZIONI

LE FORMULE PARAMETRICHE SERVONO  
A TRASFORMARE ESPRESSIONI  
GONIOMETRICHE IN ESPRESSIONI  
ALGEBRICHE

$$\sin \pi + \cos \pi + 1 = \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1 = \frac{2t+2}{1+t^2}$$

UTILISSIMO NELLE DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

