

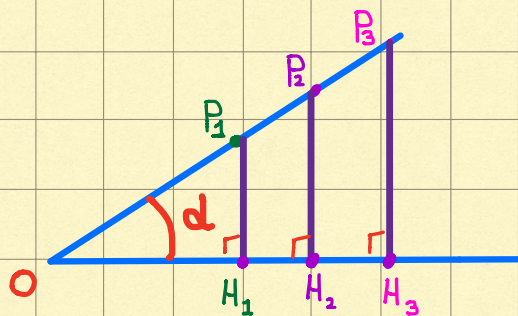
GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

TEOREMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

LA PIÙ IMPORTANTE APPLICAZIONE DELLA GONIOMETRIA SI HA NELLA
RELAZIONE TRA LATI ED ANGOLI DI UN TRIANGOLO RETTANGOLO;

OSSERVAZIONE :

CONSIDERIAMO UN ANGOLO α E INDIVIDUIAMO UN PUNTO P SU UN LATO DELL'ANGOLO E
TRACCIAMO LA PROIEZIONE ORTOGONALE DI P RISPETTO ALL'ALTRO LATO
DELL'ANGOLO, AL VARIARE DEL PUNTO P SCELTO, SI INDIVIDUANO TRIANGOLI
RETTANGOLI OPH SIMILI TRA LORO (AVENDO GLI ANGOLI CONGRUENTI);
ESISTE UNA PROPORZIONALITÀ DIRETTA TRA I LATI DEI TRIANGOLI INDIVIDUATI;



I RAPPORTI COSTANTI INDIVIDUATI
DALL'ANGOLO α A 3 DEFINIZIONI
IMPORTANTISSIME :

$$\frac{P_1H_1}{OP_1} = \frac{P_2H_2}{OP_2} = \frac{P_3H_3}{OP_3} = \sin \alpha = \frac{\text{CATETO OPPOSTO}}{\text{IPOTENUSA}}$$

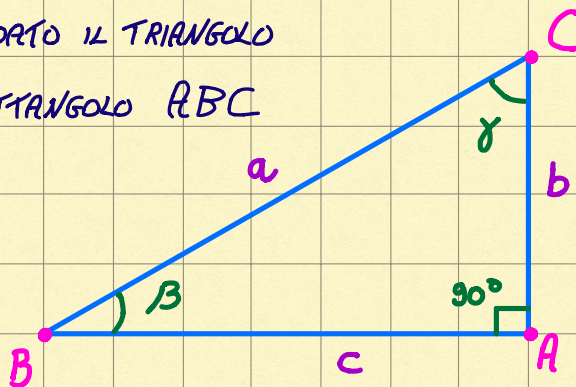
$$\frac{OH_1}{OP_1} = \frac{OH_2}{OP_2} = \frac{OH_3}{OP_3} = \cos \alpha = \frac{\text{CATETO ADIACENTE}}{\text{IPOTENUSA}}$$

$$\frac{P_1H_1}{OH_1} = \frac{P_2H_2}{OH_2} = \frac{P_3H_3}{OH_3} = \tan \alpha = \frac{\text{CATETO OPPOSTO}}{\text{CATETO ADIACENTE}}$$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

TEOREMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

DATO IL TRIANGOLO
RETTANGOLO ABC



DALLE 3 DEFINIZIONI PRECEDENTI

DEDUCIAMO I 3 TEOREMI

SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

$$\sin \alpha = \frac{\text{CATETO OPPOSTO}}{\text{IPOTENUSA}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{CATETO} = \text{IPOTENUSA} \cdot \sin(\text{ANGOLO OPPOSTO})$$

$$\Rightarrow b = a \cdot \sin \beta \quad c = a \cdot \sin \gamma$$

ANALOGAMENTE:

$$\cos \alpha = \frac{\text{CATETO ADIACENTE}}{\text{IPOTENUSA}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \beta + \gamma &= 90^\circ \\ \sin \beta &= \cos \gamma \\ \sin \gamma &= \cos \beta \end{aligned}$$

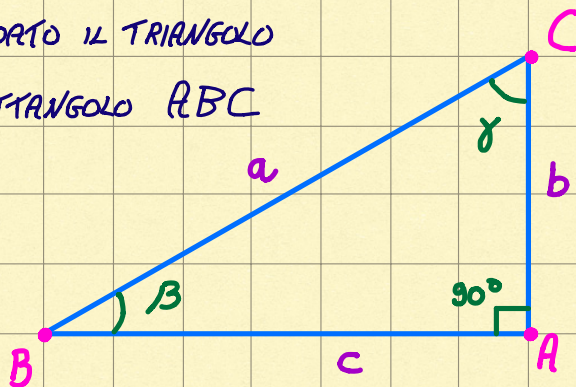
$$\Rightarrow \text{CATETO} = \text{IPOTENUSA} \cdot \cos(\text{ANGOLO ADIACENTE})$$

$$\Rightarrow b = a \cdot \cos \gamma \quad c = a \cdot \cos \beta$$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

TEOREMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

DATO IL TRIANGOLO
RETTANGOLO ABC



DALLE 3 DEFINIZIONI PRECEDENTI

DEDUCIAMO I 3 TEOREMI

SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

INFINE : $\tan \alpha = \frac{\text{CATETO OPPOSTO}}{\text{CATETO ADIACENTE}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{CATETO 1} = \text{CATETO 2} \cdot \tan(\text{ANGOLO OPPOSTO})$$

$$\Rightarrow b = c \cdot \tan \beta \quad c = b \cdot \tan \gamma$$

ESSENDO
COMPLEMENTARI
SI AVRÀ ANCHE

$$\begin{aligned} \beta + \gamma &= 90^\circ \\ \tan \beta &= \cot \gamma \\ \tan \gamma &= \cot \beta \end{aligned}$$

$$\text{CATETO 1} = \text{CATETO 2} \cdot \cot(\text{ANGOLO ADIACENTE})$$

$$\Rightarrow b = c \cdot \cot \gamma \quad c = b \cdot \cot \beta$$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

TEOREMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

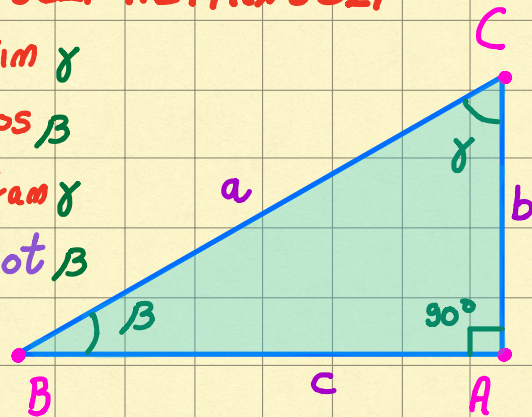
$$b = a \cdot \sin \beta \quad c = a \cdot \sin \gamma$$

$$b = a \cdot \cos \gamma \quad c = a \cdot \cos \beta$$

$$b = c \cdot \tan \beta \quad c = b \cdot \tan \gamma$$

$$b = c \cdot \cot \gamma \quad c = b \cdot \cot \beta$$

$$\beta + \gamma = 90^\circ$$



ESEMPIO 1 (NO PITAGORA)

SE CONOSCIAMO IPOTENUSA E UN ANGOLO (BRUTALE)

DATI

$$a = 3 \quad \beta = 30^\circ$$

RICHIESTE

$$\gamma = ? \quad b = ? \quad c = ?$$

$$\gamma = 60^\circ \text{ (COMPLEMENTARE DI } \beta \text{)}$$

$$b = a \cdot \sin \beta =$$

$$\frac{3}{2}$$

$$c = a \cdot \cos \beta =$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

TEOREMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

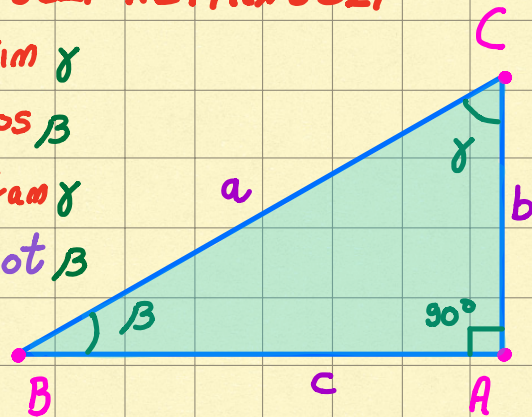
$$b = a \cdot \sin \beta \quad c = a \cdot \sin \gamma$$

$$b = a \cdot \cos \gamma \quad c = a \cdot \cos \beta$$

$$b = c \cdot \tan \beta \quad c = b \cdot \tan \gamma$$

$$b = c \cdot \cot \gamma \quad c = b \cdot \cot \beta$$

$$\beta + \gamma = 90^\circ$$



ESEMPIO 2 (NO PITAGORA)

SE CONOSCIAMO CATETO
E UN ANGOLO (SEMPLICE)

DATI

$$b = 2\sqrt{3} \quad \gamma = 60^\circ$$

RICHIESTE

$$\beta = ? \quad a = ? \quad c = ?$$

$$\beta = 30^\circ \quad (\text{COMPLEMENTARE DI } \gamma)$$

CONOSCENDO UN CATETO, POSSO TROVARE L'ALTRO CATETO

$$c = b \cdot \tan \gamma =$$

6

E TROVARE L'IPOTENUSA CON UNA FORMULA INVERSA

$$b = a \cdot \sin \beta$$

$$a = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$a = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}$$

$4\sqrt{3}$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

TEOREMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

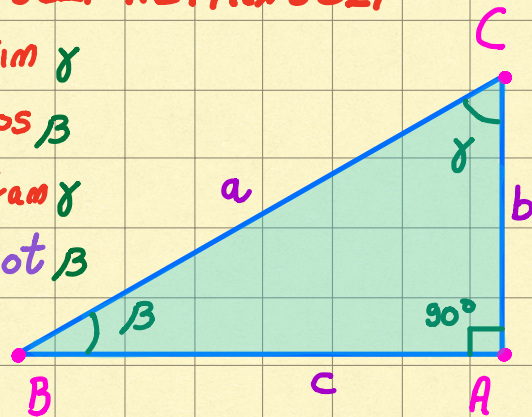
$$b = a \cdot \sin \beta \quad c = a \cdot \sin \gamma$$

$$b = a \cdot \cos \gamma \quad c = a \cdot \cos \beta$$

$$b = c \cdot \tan \beta \quad c = b \cdot \tan \gamma$$

$$b = c \cdot \cot \gamma \quad c = b \cdot \cot \beta$$

$$\beta + \gamma = 90^\circ$$



ESEMPIO 3 (NO PITAGORA)

SE CONOSCIAMO CATETO
E IPOTENUSA (SEMPLICE)

DATI

$$a = 4\sqrt{3} \quad c = 6$$

RICHIESTE

$$b = ? \quad \gamma = ?$$

$$c = a \cdot \sin \gamma \quad \text{FORMULA INVERSA} \quad \sin \gamma = \frac{c}{a} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\gamma = 60^\circ$$

$$\beta = 30^\circ$$

(COMPLEMENTARE DI γ)

$$b = a \cdot \sin \beta$$

$$2\sqrt{3}$$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

TEOREMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

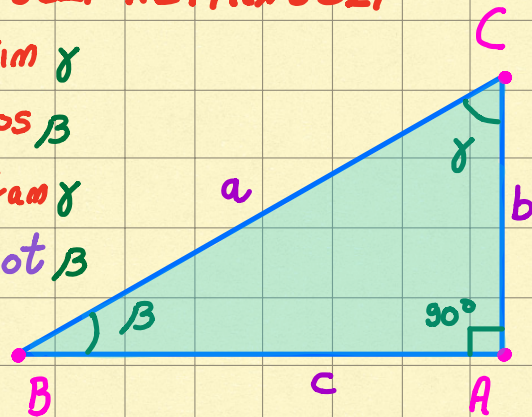
$$b = a \cdot \sin \beta \quad c = a \cdot \sin \gamma$$

$$b = a \cdot \cos \gamma \quad c = a \cdot \cos \beta$$

$$b = c \cdot \tan \beta \quad c = b \cdot \tan \gamma$$

$$b = c \cdot \cot \gamma \quad c = b \cdot \cot \beta$$

$$\beta + \gamma = 90^\circ$$



ESEMPIO 4 (NO PITAGORA)

SE CONOSCIAMO CATETO

E UN ANGOLO

DATI

$$c = 2 + \sqrt{3} \quad \beta = 15^\circ$$

RICHIESTE

$$b = ? \quad a = ? \quad \gamma = ?$$

$$\gamma = 75^\circ \quad (\text{COMPLEMENTARE DI } \beta)$$

$$b = c \cdot \tan \beta$$

1

$$b = a \cdot \sin \beta \quad \text{FORMULA INVERSA}$$

$$a = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\sqrt{6} + \sqrt{2}$$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

$$\beta + \gamma = 90^\circ$$

$$\tan \beta = \cot \gamma$$

$$\tan \gamma = \cot \beta$$

$$\beta + \gamma = 90^\circ$$

$$\sin \beta = \cos \gamma$$

$$\sin \gamma = \cos \beta$$

TEOREMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

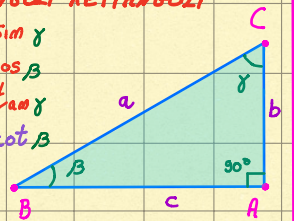
$$b = a \cdot \sin \beta \quad c = a \cdot \sin \gamma$$

$$b = a \cdot \cos \gamma \quad c = a \cdot \cos \beta$$

$$b = c \cdot \tan \beta \quad c = b \cdot \tan \gamma$$

$$b = c \cdot \cot \gamma \quad c = b \cdot \cot \beta$$

$$\beta + \gamma = 90^\circ$$



$$\cot d = \frac{1}{\tan d}$$

$$\cos d = \pm \frac{1}{\sqrt{\tan^2 d + 1}}$$

ESEMPIO 2 (NO PITAGORA)

SE CONOSCIAMO CATETO

E LA TANGENTE DI UN ANGOLO

DATI

$$b = \sqrt{2} \quad \tan \beta = 2\sqrt{2}$$

RICHIESTE

$$\gamma = ? \quad a = ? \quad c = ?$$

$$\cot \beta = \frac{1}{\tan \beta} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan \gamma = \cot \beta = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad c = b \cdot \tan \gamma \quad \frac{1}{2}$$

$$b = a \cdot \sin \beta \quad \text{FORMULA INVERSA} \quad a = \frac{b}{\sin \beta} \quad \sin \beta = \cos \gamma$$

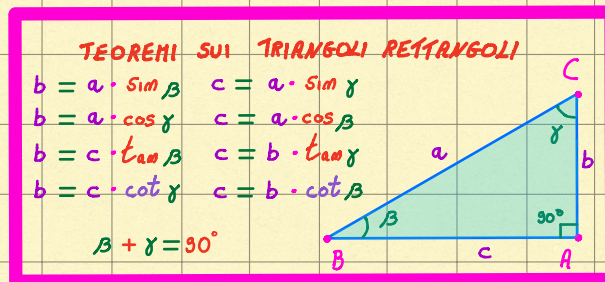
ANGOLO ACUTO

$$\cos \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \gamma + 1}}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

GONIOMAGIA A COLORI PER TUTTI

$$\begin{aligned}\beta + \gamma &= 90^\circ \\ \sin \beta &= \cos \gamma \\ \sin \gamma &= \cos \beta\end{aligned}$$



ESEMPIO 2 (NO PITAGORA)

SE CONOSCIAMO CATETO
E ARCSENO DI UN ANGOLO

DATI

$$c = 2\sqrt{3}$$

$$\beta = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$$

RICHIESTE

$$\gamma = ? \quad a = ? \quad b = ?$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos \gamma = \sin \beta$$

$$c = a \cdot \sin \gamma$$

$$a = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\sin \gamma = \cos \beta$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$a = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$3\sqrt{2}$$

$$b = a \cdot \sin \beta$$

$$\sqrt{6}$$